R

Math P. 754

Mathesis. Geometria generalis 271.

R

Anleitung
zur
Selbsterlernung der Geometrie
in Briefen.

Insbesondere für diejenigen
welche dabei
Euclid's Elemente
und
Hrn. Hofr. Kästner's Anfangsgründe
zum Grunde legen wollen.

Von
Johann Andreas Christian Michelsen,
Professor der Mathematik und Physik am Berlinischen
Gymnasium.

Erster Band.

Mit Kupfern.

Berlin, 1790.
bei Carl Matzdorff.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

Hochgebornen Herrn

Herrn

Grafen Henrich

Erbgrafen zu Stollberg Wernigerode ꝛc.

widmet

diese Briefe

als

ein geringes Denkmal des Vergnügens

welches er bei seinen

mit

Demselben

gepflogenen mathematischen Unterredungen

genossen

der

Verfasser.

Vorrede.

Von gegenwärtigen Briefen ist der größte Theil schon vor einigen Jahren gedruckt worden, daher in der zweiten Anmerkung S. 5 und 6 Hrn. Kästners geometrischer Sammlungen nicht hat gedacht werden können. Wäre dieses nicht, so würden außerdem ein Paar Stellen anders abgefaßt seyn, die aber die Hauptsache nicht betreffen, und bloß wegen des darin herrschenden Tons auch mir nicht gefallen. Ueber die Absicht, welche ich mir bei dieser Schrift vorgesetzt habe, brauche ich mich für diejenigen, welche sie lesen werden, nicht weiter zu erklären; und was einige Recensenten betrifft, die solches gern sehen würden, damit sie zu ihren Anzeigen nicht nöthig haben mögten, das Buch selbst zu lesen, so kann ich mich dieses mal ihnen nicht gefällig beweisen. Wollen Kenner, wie Hr. Kästner, Hr. Klügel und ein Paar mir unbekannte Recensenten in der Allg. Litt. Zeitung und

den Gothaischen gelehrten Nachrichten, nach Ihrer bisher gegen mich bewiesenen Güte, einige Augenblicke von Ihrer kostbaren Zeit auch gegenwärtiger für Anfänger geschriebenen Schrift schenken: so wird Ihr Beifall für mich Ermunterung und Ihr Tadel Belehrung seyn. Ueberhaupt ist mir alles, was von mathematischen und philosophischen Recensenten gesagt wird, ich mag damit überein denken oder nicht, angenehm; und die unmathematischen und unphilosophischen werden nur dadurch lästig, daß man doch wenigstens einmal ihnen zeigen muß, daß man allenfalls auch antworten könnte, und dann genöthiget ist, sich etwas nachdrücklich zu erklären. Uebrigens werde ich in den Nachrichten, womit ich jedes Stück meiner Beiträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik beschließe, gelegentlich meine Schriften selbst anzeigen, und dabei einen hinlänglichen Beweis geben, daß ich gegen meine Fehler nicht blödsichtig bin; woraus sich denn natürlich und von selbst ergiebt, daß jeder, der mich auf dergleichen aufmerksam macht, ein Recht auf meine Dankbarkeit habe. Berlin, den 6ten April 1790.

Inhalt.

Inhalt.

Erster Brief.

Einleitung. . . . . . . Seite 1

Zweiter Brief.

Ueber die geometrische Methode und die Nothwendigkeit des Studiums der Geometrie für jeden Studierenden. 7

Dritter Brief.

Fortsetzung der im vorhergehenden Briefe angefangenen Betrachtung über das erste Buch der Euclideischen Elemente überhaupt. 17

Vierter Brief.

Ueber die geometrischen Aufgaben, Lehrsätze und Zusätze, und über die dabei vorkommende doppelte Art der Beweise; desgleichen über die Beschaffenheit und den Gebrauch geometrischer Elemente. . . 28

Fünfter Brief.

Ueber die Nothwendigkeit des Studiums der Geometrie für jeden Studierenden insbesondere. . . 36

Sechster Brief.

Anmerkungen zu den Erklärungen, Forderungen und Grundsätzen des ersten Buchs der Euclideischen Elemente. 43

Siebenter Brief.

Fortsetzung der Anmerkungen über die Erklärungen, Forderungen und Grundsätze des ersten Buchs der Euclideischen Elemente. 57

Achter Brief.

Fernere Fortsetzung der Anmerkungen zu den Erklärungen, Forderungen und Grundsätzen des ersten Buchs der Euclideischen Elemente. . . . 69

Neunter Brief.

Anmerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen des ersten Buchs der Elemente des Euclides. . Seite 79

Zehnter

Zehnter Brief.
Fortsetzung der Anmerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen des ersten Buchs der Euclideischen Elemente. 91
Eilfter Brief.
Fortsetzung der Anmerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen des ersten Buchs der Elemente des Euclides. 104
Zwölfter Brief.
Fortsetzung der Anmerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen des ersten Buchs der Elemente des Euclides. 114
Dreizehnter Brief.
Fortsetzung der Anmerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen des ersten Buchs der Elemente des Euclides. 126
Vierzehnter Brief.
Fortsetzung der Anmerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen des ersten Buchs der Elemente des Euclides. 141
Funfzehnter Brief.
Beschluß der Anmerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen des ersten Buchs der Elemente des Euclides. 155
Sechszehnter Brief.
Anmerkungen zu dem zweiten Buche der Elemente des Euclides. 158
Siebenzehnter Brief.
Fortsetzung der Anmerkungen zu dem zweiten Buche der Euclideischen Elemente. 180
Achtzehnter Brief.
Beschluß der Anmerkungen zu dem zweiten Buche der Euclideischen Elemente. 192
Neunzehnter Brief.
Ueber einige Sätze des dritten Buchs der Euclideischen Elemente. 209
Zwanzigster Brief.
Noch etwas weniges über das 3te Buch der Euclideischen Elemente, dann über einige Sätze des 4ten Buchs. 215
Ein und zwanzigster Brief.
Beschluß. 220

Anlei-

Anleitung
zur
Selbsterlernung der Geometrie
in Briefen.

Erster Brief.
Einleitung.

Das Lesen meiner Versuche in Socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie sollte Ihnen zur Vorbereitung auf das Studium der Geometrie dienen, und nach Ihrem letzten Briefe zu urtheilen, habe ich diese meine Absicht vollkommen erreicht. Nun muß ich Ihnen, an Statt der bisherigen Milch-

speise, stärkere Nahrung vorsetzen; und da Sie Ihren Geschmack schon so weit gebildet haben, daß das Beste Ihnen zugleich das angenehmste seyn wird: so soll nun die Lesung zweier Werke, denen jeder Kenner unter den Lehrbüchern der Geometrie die erste Stelle einräumet, Ihre Beschäftigung werden. Euclid's Elemente, deren ich bereits in meinen Versuchen Erwähnung gethan habe, sind das erste davon. Dies ist das älteste Lehrbuch der Geometrie, das auf uns gekommen ist, aber es nimmt, nach dem Urtheile des ersten unserer jetzt lebenden Mathematiker *), nicht bloß deswegen, sondern auch als vollkommenstes Muster eines deutlichen und überzeugenden Vortrags, unter den vortreflichsten Werken des menschlichen Verstandes eine der ersten Stellen ein. Verbinden Sie hiermit das Urtheil des Hrn. Prof. Hindenburgs in Leipzig **): Wie man die Wahrheit gleichsam mit Händen greifen, die gegriffene Wahrheit festhalten, und so ferner Wahrheit aus Wahrheit finden und ableiten könne — das kann man am besten von Euclides lernen. Seine Geometrie ist eben so sehr ein klassisches Werk für Anfänger, die ihren Verstand zur Erforschung der Wahrheit abrichten und schär-

*) Des Hrn. Hofrath und Prof. Kästners in Göttingen, in der ersten Abtheilung des ersten Theils seiner mathematischen Anfangsgründe, Göttingen 1786. S. 424.

**) Im zweiten Stück des Leipziger Magazins zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie fürs Jahr 1781. Leipzig und Dessau. S. 146.

schärfen wollen, als für Männer von schon geübtem Verstande, die das Ganze, wie die einzelnen Theile, mit einem Blick zu umfassen vermögend sind, die die Vollkommenheit, Harmonie und Solidität dieses Ganzen aus der allmäligen Fortschreitung von einer Wahrheit zu der nächst angrenzenden, aus der Zusammenstimmung und Verbindung der Theile unter einander zu einem Zweck: **unüberwindlicher Gewißheit für die Aussagen der Lehrsätze, und unbeschränkter Zuverläßigkeit bei den Auflösungen der Aufgaben**, gehörig zu schätzen wissen. Man hört, wenn man diese Lobsprüche erwägt, auf, sich über die große Menge der Ausgaben und Uebersetzungen dieser Elemente zu verwundern, wovon man in des Hrn. Prof. Scheibels zu Breslau Einleitung in die mathematische Bücherkenntniß *), im ersten und fünften Stücke ein sehr vollständiges Verzeichniß findet; zumal da man sonst allgemein urtheilte, daß jeder, der die Mathematik erlernen wolle, Euclid's Elemente auswendig gelernt haben müsse. Die erste gedruckte und höchst seltene Ausgabe dieser Elemente ist die von dem Augsburger Drucker Ehrhard Ratdold Venedig 1482 **); die beste, vollständigste und präch-

*) Es sind davon bis jezt 15 Stück herausgekommen. Die ersten 6 Stücke erschienen von 1769 bis 1775, und sind von 1772 bis 1781 bereits zum zweyten Male aufgelegt worden.

**) Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quam foelicissime: In folio.

prächtigste Ausgabe aber die Oxfordsche von David Gregorius 1703 *). Außer diesen verdient wegen ihrer Deutlichkeit und der beigefügten Erinnerungen die von Christoph Clavius **) und von Ihnen zu Ihrem gegenwärtigen Gebrauch die von Georg Friedrich Bärmann ***) oder die

lio. 136 Bl. Am Ende steht: Opus elementorum euclidis megarensis in geometriam artem. In id quoque Campani perspicacissimi Commentationes finiunt. Ehrhardus ratdolt Augustensis impressor solertissimus venetiis impressit. Anno Salutis M. CCCC. lxxxij. Octav. Calend. Iun. Lector Vale.

*) ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ. EVCLIDIS QVAE SVPERSVNT OMNIA. Ex Recensione DAVIDIS GREGORII M. D. Astronomiae Professoris Saviliani, et R. R. S. OXONIAE, E THEATRO SHELDONIANO. In folio.

**) Man hat davon mehrere Ausgaben. Die beiden ersten erschienen zu Rom 1574 und 1589 in zwei Octavbänden, die dritte in Cöln 1591 in zwei Theilen in Folio. Eine vierte Edition kam Rom 1603, und ein Nachdruck Frankfurt 1607 heraus. Der vollständige Titel der zweiten Ausgabe ist: Euclidis Elementorum Libri XV. Accessit XVI de Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione. Omnes perspicuis Demonstrationibus accuratisque Scholiis illustrati: nunc iterum editi, ac multarum rerum accessione locupletati. Auctore Christophoro Clavio, e Societate Iesu. Romae apud Bartholomaeum Grassium MDLXXXIX.

***) Elementorum Euclidis Libri XV. Ad Graeci Contextus

die von Hrn. Johann Friedrich Lorenz *) herausgegebene Uebersetzung gemerkt zu werden; und auf diese letzte werde ich mich in dem Folgenden vorzüglich beziehen. So vortreflich indeß Euclid's Elemente sind, und so sehr sie alle die Lobsprüche verdienen, welche man ihnen ertheilt hat, so erlaubt es doch der jetzige Zustand der Mathematik nicht, bei ihnen allein stehen zu bleiben. Wollen Sie daher mit einem Male einen solchen Grund in der Geometrie legen, auf dem Sie künftig das ganze Gebäude der Mathematik aufführen können: so müssen Sie mit der Lesung der Euclideischen Elemente das Lesen der Anfangsgründe der Geometrie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie des Hrn. Hofrath und Prof. Kästners in Göttingen verbinden, und zwar in der vorhin angeführten neuesten Ausgabe der ersten Abtheilung des ersten Theils seiner mathematischen Anfangsgründe vom Jahr 1786 **). Ueber die allgemein anerkannte

tus fidem recensiti et ad vsum Tironum accommodati. Lipsiae 1743 und 1769.

*) Euclid's Elemente, funfzehn Bücher, aus dem Griechischen übersetzt von Johann Friedrich Lorenz. Halle 1781. Man kann davon auch die sechs ersten Bücher und das eilfte und zwölfte besonders bekommen.

**) Der erste Theil dieser unübertreflichen Anfangsgründe kam zuerst 1758 heraus, und wurde 1768 zum zweiten, 1774 zum dritten, und 1786 zum vierten Male aufgelegt, und erhielt in eben diesem Jahre eine zweite Abthei-

Vortreflichkeit dieser Anfangsgründe sage ich Ihnen nichts; Sie werden sie empfinden, sobald Sie dieselben lesen werden, und desto stärker, je länger und je sorgfältiger Sie Sich damit beschäftigen. Betrachten Sie es als die würdigste Belohnung Ihres bisher bewiesenen Eifers, daß ich Sie nach einer kurzen Vorbereitung unmittelbar zu den Hauptquellen führen, und Sie mit den beiden wichtigsten Werken über die Geometrie, und zu gleicher Zeit mit dem ältesten und neuesten Lehrbuche dieser Wissenschaft bekannt machen will. Aber vielleicht ist die Lesung dieser Werke für Sie zu schwer? Wenn man bei dem Bestreben nach einem rühmlichen und wichtigen Ziele auf Schwierigkeiten stößt, so muß man seinen Eifer verdoppeln; und wenn Sie diesen Grundsatz befolgen werden, so hoffe ich, Sie vermittelst einiger, Ihnen von Zeit zu Zeit mitzutheilenden, Anmerkungen in den Stand zu setzen, Sich davon zu überzeugen, daß der Grund der

Dun-

theilung, welche Anwendungen der Rechenkunst auf mancherlei Geschäfte in sich begreift. Der zweite Theil, Anfangsgründe der angewandten Mathematik erschien 1759, und durchaus verbessert und vermehrt in zwei Abtheilungen 1780. Die neueste Auflage der ersten Abtheilung des dritten Bandes, Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen, ist von 1767, und der zweiten Abtheilung, Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen, vom Jahr 1770. Die erste Abtheilung des vierten Bandes begreift die Anfangsgründe der höhern Mechanik, und die zweite die Anfangsgründe der Hydrodynamik. Jene ist 1766 diese 1769 herausgekommen.

Dunkelheit, welche manche den gedachten Werken vorwerfen, mehr in ihnen selbst als in diesen Werken zu suchen ist. Lassen Sie alle vorgefaßte Meinungen fahren, und lesen Sie, sobald Sie Sich die Lorenzische Uebersetzung der Euclideischen Elemente angeschafft haben werden, und noch vor meinem nächsten Briefe, in fester Hoffnung, daß Ihnen nichts zu schwer werden werde, das erste Buch derselben. Da alle darin enthaltenen Erklärungen, Forderungen, Grundsätze, Aufgaben und Lehrsätze auch in den beiden ersten Stücken meiner Versuche über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie abgehandelt worden sind: so werde ich dieselben bei meinem nächsten Schreiben, und zwar auch in der Form, in welcher sie in der gedachten Uebersetzung vorkommen, als bekannt voraussetzen.

Zweiter Brief.

Ueber die geometrische Methode und die Nothwendigkeit des Studiums der Geometrie für jeden Studierenden.

1. Betrachtung des ersten Buchs der Euclideischen Elemente in Rücksicht auf die darin befolgte Methode.

Ich habe jetzt nicht die Absicht, diesen doppelten Gegenstand vollständig abzuhandeln; nur so viel werde ich darüber sagen, als nöthig ist, Sie darauf aufmerksam zu machen, und die Quellen

der Regeln, welche Sie bei Ihren künftigen Untersuchungen zu beobachten haben werden, zu bezeichnen.

Man kann die geometrische Methode, wie solches auch Hr. Hofrath Kästner *) bemerkt hat, nicht besser kennen lernen, als wenn man in dieser Absicht Euclid's Elemente, oder Schriften, die diesem Muster getreu folgen, lieset. Wir wollen diesen Wink benutzen, uns aber dabei jetzt auf das erste Buch der gedachten Elemente einschränken.

Das erste, was dabei in die Augen fällt, ist, daß Euclid von Erklärungen anfängt, von diesen zu Forderungen und Grundsätzen, und darauf zu Aufgaben, Lehrsätzen und Zusätzen fortgeht; es zeigt sich aber bei einer genauern Untersuchung bald, daß das Unterscheidende der geometrischen Methode nicht in diesen Dingen überhaupt genommen bestehe, sondern auf der besondern Beschaffenheit beruhe, welche sie beim Euclid, und allen denen, welche seinem Vorbilde getreu gefolgt sind, haben.

Um von den Erklärungen anzufangen, so dienen dieselben in der Mathematik, nicht dazu, die Merkmale schon vorher gegebener Dinge deutlich darzustellen und mit Worten auszudrücken, sondern es

*) §. 33. S. 16. der Vorerinnerungen von der Mathematik überhaupt, und ihrer Lehrart, in der 1sten Abtheil. des ersten Theils der oben ausführlich angezeigten mathem. Anfangsgründe.

es wird durch sie immer der Begriff allererst gegeben. In andern Wissenschaften sind die Erklärungen nichts weiter als Zergliederungen von Begriffen, die vor den Erklärungen, obgleich nur noch verworren, vorhergehen; in der Mathematik aber hat man vor der Erklärung gar keinen Begriff von der erklärten Sache, sondern man setzt diese durch die Erklärungen immer erst willkührlich, ohne daß sie durch die Natur des Verstandes oder durch die Erfahrung gegeben werden, zusammen. Die mathematischen Erklärungen haben daher überhaupt, so wie die geometrischen insbesondere, den eigenthümlichen Vorzug, daß sie ihren Gegenstand ursprünglich darstellen, und keiner anderweitigen Ableitung oder eines Beweises bedürfen, auch geben sie nicht mehr und nicht weniger Merkmale an, als zum ausführlichen Begriff gehören, und empfehlen sich endlich durch den möglich höchsten Grad der Klarheit und Zulänglichkeit der Merkmale. Was ich Ihnen hier über die Erklärungen der Mathematik überhaupt, welches also natürlicher Weise auch von den geometrischen insbesondre gilt, mitgetheilt habe, werden Sie künftig in des Hrn. Prof. Kant zu Königsberg Critik der reinen Vernunft Riga 1781. S. 712 f. weiter ausgeführt lesen können; jetzt suchen Sie Sich davon durch eine genauere Betrachtung der Definitionen, womit Euclid das erste Buch seiner Elemente anfängt, zu überzeugen.

Der Gegenstand der ganzen Geometrie ist kein anderer, als die Ausdehnung oder der Raum, ein

Gegenstand, dessen Begriff in uns vor der Wahrnehmung aller wirklichen Gegenstände vorausgehen muß, so wie, wenn man alles, was bei dieser Wahrnehmung auf unsere Empfindung wirkt, wegläßt, der Raum übrig bleibt *). Es ist also der Gegenstand der Geometrie überhaupt von der Art, daß er unabhängig von aller Erfahrung, oder a priori, wie man es nennt, erkannt werden kann. Aber auf eben diese Weise kann man auch die Theile desselben, oder die in der Geometrie nach und nach zu betrachtenden einzelnen Gegenstände finden. Der unbegrenzte und ungetheilte Raum ist kein Vorwurf der Untersuchung, und es bleibt also bloß der begrenzte Raum, das, was man auch geometrischer Körper nennet, übrig. Ferner unterscheidet sich ein begrenzter Raum von jedem andern einzig und allein durch die Größe und Gestalt, und beide hängen von der Beschaffenheit der Größe und der Lage der Grenzen ab, die ihn einschließen. Es beschäftiget sich also die Geometrie mit der Gestalt und der Größe begrenzter Räume, und untersucht, wie diese Dinge von der Beschaffenheit, der Größe und der Lage der Grenzen, zwischen welchen die Räume eingeschlossen sind, bestimmt werden. Und da das Zusammengesetzte, vermöge der Natur unsers Verstandes, nicht eher mit Deutlichkeit und Gewißheit er-

*) Prolegomena zu einer jeden künftigen Methaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können, von Immanuel Kant. Riga 1783. §. 6. f. und ebend. Critik der reinen Vernunft S. 22. f.

erkannt werden kann, als bis das Einfache, oder die Theile, woraus es besteht, genau untersucht worden sind: so fängt auch die Geometrie bei ihren Untersuchungen von dem Einfachsten an, und geht stufenweise zu dem Zusammengesetzten fort. Nach diesen Sätzen und Regeln findet man nun nach und nach alle einzelnen Gegenstände der Geometrie so, daß dabei gar nicht zu verkennen ist, wie sie durch eine willkührliche Zusammensetzung entstehen, und insgesammt erst durch ihre Erklärungen gegeben werden.

Das Allereinfachste ist, was gar keine Theile hat, und dieses daher auch der erste in der Geometrie zu bemerkende Gegenstand. Man nennet solches einen Punkt, und versteht darunter jedesmal, was keine Theile hat, ohne sich darum zu bekümmern, ob dieser Begriff einen in der Natur ihm entsprechenden Gegenstand habe, oder nicht? Das Nächste nach dem Punkte würde dasjenige seyn, was aus zwei Punkten bestünde, wenn nur überall etwas aus Punkten in dem angeführten Verstande bestehen könnte. Aber man mag sich zwei oder mehrere Punkte gedenken, so erhält man dadurch nie etwas anders als Punkte, die entweder alle zusammenfallen, oder einzeln neben einander liegen, und in beiden Fällen keinen aus ihnen zusammengesetzten Gegenstand bilden. Indeß ist die Vorstellung zweier nicht zusammenfallender Punkte immer mit dem Begriffe ihrer Entfernung von einander, oder des Weges von dem einen zum andern verbunden, und das ist eine Länge ohne Breite, welche man

man mit dem Namen, Linie, belegt, und deren Enden also Punkte sind. Man kann daher nicht sagen, daß eine Linie aus Punkten bestehe, aber man kann die Enden einer Linie annehmen, wo man will, und es hat folglich die Linie allenthalben Punkte, ohne aus dergleichen zusammengesetzt zu seyn. Auch denkt man sich, wenn man es genauer überlegt, die Entfernung zweier Punkte von einander, oder den Weg von dem einen zum andern, zunächst so, daß man sich dabei nur eine Richtung vorstellt; und setzt man diese Bestimmung zu dem Begriffe der Linie, so bekömmt man die gerade Linie, die sich also von der Linie überhaupt dadurch unterscheidet, daß sie nur eine Richtung hat, oder, wie es Euclides ausdrückt, den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt. Mehr als zwei Punkte, aber alle in einer geraden Linie, führen auf keinen neuen Gegenstand; wir wollen sie uns also nicht in einer geraden Linie gedenken, und für jezt nicht mehr als drei annehmen, um so stufenweise als möglich fortzugehen. Jede zwei von diesen Punkten führen wieder auf den Begriff der Linie; aber wenn man jeden von den Punkten, die man allenthalben in dieser Linie annehmen kann, nun auch in Gedanken mit dem vorhingedachten dritten Punkte verbindet: so entsteht dadurch die Vorstellung einer Länge und Breite. Was nur Länge und Breite hat wird eine Fläche genennt, und dies ist also der sich zunächst ergebende Gegenstand, und es ist klar, daß die Enden einer Fläche Linien sind. Nun ferner hierbei alle Linien so genau als mög-

möglich gedacht, d. h. allenthalben gerade Linien angenommen, so erhält man den Begriff einer Ebene, welche also den auf ihr befindlichen geraden Linien gleichförmig liegt, oder eine Fläche ist, in welcher alle Punkte der geraden Linien liegen, die man sich zwischen irgend zweien in ihr befindlichen Punkten gezogen gedenkt. Auch jede Fläche oder Ebene kann man aufhören lassen, wo man will, und kann sich also in ihnen allenthalben Linien, und in der Ebene allenthalben gerade Linien gedenken; aber es ist deswegen die Fläche und Ebene eben so wenig aus Linien zusammengesetzt, als die Linie aus Punkten. Noch weniger darf man sich eine Fläche oder Ebene als aus Punkten bestehend vorstellen, ob man sich gleich allenthalben Punkte in derselben gedenken kann. Dies ist sogar nunmehr wegen der zu beobachtenden Stufenfolge nothwendig, und wir müssen also nun untersuchen, auf was für Gegenstände die Vorstellung der Punkte und Linien, insbesondere der geraden Linien, in Ebenen führe, denn die Fläche überhaupt genommen ist dazu zu unbestimmt. Drei Punkte also in einer Ebene, aber nicht in einer geraden Linie, gedacht, so haben jede zwei Linien, die man sich zwischen diesen Punkten gedenkt, und die folglich einander in dieser Ebene berühren, eine Neigung gegen einander. Diese Neigung wird ein ebener Winkel genannt, und er erhält das Beiwort geradliniger, wenn die gedachten Linien gerade Linien sind. Auch giebt jede gerade Linie zwischen zweien der gedachten Punkte, mit einer andern zwischen einem in ihr willkührlich ange-

angenommenen Punkte und dem vorhergehenden dritten, eine auf einer andern stehenden geraden Linie und zwei Winkel, unter welchem Worte wir von jetzt an immer ebene und geradlinige Winkel gedenken wollen. Beide Winkel können einander gleich, oder ungleich seyn. Ist das Erstere, so steht die eine gerade Linie auf der andern senkrecht, und jeder der gedachten Winkel heißt ein rechter Winkel; ist aber das Andere, so ist der eine Winkel größer, und der andere kleiner als ein rechter Winkel, und jener wird ein stumpfer, dieser ein spitziger Winkel genennt. Nun denken Sie Sich zwischen jedem der gedachten drei Punkte Linien, so erhalten Sie von allen Seiten begrenzte Flächen oder Ebenen, je nachdem Sie Sich die Punkte überhaupt in einer Fläche, oder insbesondere in einer Ebene gedenken. Vorausgesetzt also, daß Grenze das Aeußerste oder das Ende eines Dinges ist, und daß dasjenige, was von einer oder mehrern Grenzen eingeschlossen ist, Figur genennt wird: so kommen wir hierdurch zu den Figuren, und da wir es jetzt vorzüglich mit Ebenen zu thun haben, zu den ebenen Figuren. Gehen wir auch hier von dem Einfachen zu dem Zusammengesetzten fort, so stellt sich uns der Zirkel als die erste ebene Figur dar; indem derselbe von einer einzigen Linie dergestalt begrenzt wird, daß alle Punkte in derselben von einem gewissen Punkte innerhalb der Figur gleichweit entfernt, oder alle gerade Linien, welche bis zu derselben aus Einem innerhalb der Figur befindlichen Punkte gezogen werden, einander gleich

sind.

sind. Peripherie oder Umkreis des Zirkels und Mittelpunkt sind Benennugen, die sich dabei von selbst darbieten. Dann folgen die geradlinigen Figuren, oder diejenigen, die von geraden Linien eingeschlossen sind. Auch hier von dem Einfachen zu dem Zusammengesetzten, von dem Allgemeinen und weniger Bestimmten zu dem Besondern und Bestimmtern fortgegangen, so erhält man nach und nach das Dreieck, das Viereck, das Vieleck, das gleichseitige, das gleichschenklige, das ungleichseitige, das rechtwinklige, das stumpfwinklige, das spitzwinklige Dreieck, das Quadrat, das Oblongum oder Rechteck, den Rhombus, den Rhomboides, und das Trapezium. Endlich kann man sich, so wie die bisher betrachteten geraden Linien immer eine Neigung gegen einander hatten, auch gerade Linien in einer Ebene gedenken, die dergleichen nicht haben, oder die, so weit man sie auch an beiden Seiten verlängern mag, doch an keiner zusammen treffen, und dies sind die Parallellinien.

Hier bleibe ich stehen, weil ich mich jetzt bloß auf das erste Buch der Euclideischen Elemente einschränke, und füge nur noch einige Anmerkungen bei.

Man nimmt, wenn man die in der Geometrie zu betrachtenden Gegenstände auf diese Art aufsucht, alle einzig und allein aus sich selbst her, und schafft also gleichsam dieselben selbst. Es kann daher

her auch keines von den Merkmalen, wodurch sie sich unterscheiden, verborgen bleiben, die Vernunft durchschaut vielmehr das ganze Wesen derselben; und es müssen folglich auch die Erklärungen davon den möglich höchsten Grad der Gewißheit, Klarheit und Vollkommenheit haben.

Selbst in Ansehung der Folge, welche unter den gedachten Gegenständen Statt findet, haben die Erklärungen davon einen nicht unbeträchtlichen Vorzug. Man darf diese Folge nur einmal recht deutlich überdenken, um sie sich auf das festeste einzuprägen, oder sie sich wenigstens, so oft man will, durch ein leichtes Nachdenken wieder gegenwärtig zu machen.

Die siebenzehnte, achtzehnte, und neunzehnte Erklärung des Euclides findet sich unter den von uns aufgesuchten nicht; es wird sich aber in der Folge eine bequeme Gelegenheit zeigen, zu untersuchen, ob sie eigentlich hierher gehören?

So viel von den Erklärungen in der Geometrie. Was von ihnen gilt, läßt sich auch auf die übrigen mathematischen Erklärungen, so wie das ferner von der geometrischen Methode zu sagende auch auf die mathematische Methode überhaupt anwenden, wenigstens so lange, als bloß von der reinen Mathematik die Rede ist; daher ich auch in der Folge bisweilen die Beiwörter mathematisch und geometrisch mit einander verwechseln werde.

Dritter Brief.

Fortsetzung der im vorhergehenden Briefe angefangenen Betrachtung des ersten Buchs der Euclideischen Elemente.

Es ist eine alte Bemerkung, und Sie finden sie z. B. in Cicero's erstem Buche von den Pflichten, am Ende des zweiten Capitels, daß jede methodisch angestellte Untersuchung von der Erklärung des Gegenstandes anfangen müsse, damit man bestimmt wisse, was eigentlich untersucht werden soll. Finge also der Geometer nur überhaupt von Erklärungen an, so wäre er auch, wenigstens in diesem Stück, von dem gründlichen Untersucher überhaupt nicht unterschieden. Aber er beschäftiget sich mit dem Raume, einem Gegenstande, von welchem er den Begriff, unabhängig von aller Erfahrung, hat; und untersucht die Theile desselben, welche er nicht anders als durch eine willkührliche Zusammensetzung findet. Es unterscheidet sich also der Geometer in Ansehung der Erklärungen, von welchen er ausgeht, einmal dadurch, daß er von denselben ausgehen muß, weil er durch sie die Gegenstände seiner Untersuchung immer erst erhält; und damit ist zugleich verbunden, daß er in aller Absicht vollkommene Erklärungen (Definitionen im eigentlichen und strengsten Verstande) zum Grunde legen kann. So wichtig dies Unterscheidungsmerkmal ist, so ist es gleichwohl nicht das einzige; lassen Sie uns also uns nun auch mit den übrigen bekannt machen.

Es haben die Gegenstände der Geometrie das Besondere, daß sie sich entweder durch bloße Einbildung, oder auch nach derselben auf dem Papier, oder etwas dergleichen, ohne daß man dazu das Muster aus irgend einer Erfahrung borgen dürfte, darstellen lassen. Man nennt dies, einen Gegenstand oder den Begriff davon construiren, so wie die daher entstehenden Anschauungen Constructionen. Jede Construction ist ein einzelnes Objekt, und dient gleichwohl den Begriff oder Gegenstand in seiner Allgemeinheit auszudrücken, weil man dabei auf alle die Verschiedenheiten, welche das Wesen der Sache nicht verändern, nicht sieht. Man zieht z. B. bei einer geraden Linie bloß die sich immer gleich bleibende Richtung ihrer Theile in Betrachtung, und so gilt, was von einer geraden Linie dargethan worden ist, von allen. Ohne die Construction der Begriffe würde der Geometer seine Untersuchung bloß auf solche Eigenschaften einschränken müssen, die bereits in dem Begriffe lägen, er würde, mit andern Worten, weiter nichts thun können, als seine Begriffe entwickeln, und sie zu einer größern Ausführlichkeit erheben; vermittelst der Construction aber gehet er aus dem Begriffe hinaus, und findet Eigenschaften, die gar nicht in demselben liegen, indem die Construction ihm solche vor Augen legt. Man gebe, sagt der Hr. Professor Kant in seiner Critik der reinen Vernunft S. 716. einem Philosophen den Begriff eines Triangels, und lasse ihn nach seiner Art (d. h. ohne zur Construction dieses Begriffs seine Zuflucht zu neh-

nehmen) ausfündig machen, wie sich wohl die Summe seiner Winkel zum rechten verhalten möge. Er hat nun nichts, als den Begriff einer Figur, die in drei gerade Linien eingeschlossen ist, und an ihr den Begriff von eben so viel Winkeln. Nun mag er diesem Begriffe nachdenken, so lange er will, er wird nichts Neues herausbringen. Er kann den Begriff der geraden Linie, oder eines Winkels, oder der Zahl drei zergliedern und deutlich machen, aber nicht auf andere Eigenschaften kommen, die in diesem Begriffe gar nicht liegen. Allein der Geometer nehme diese Frage vor. Er fängt sofort davon an, einen Triangel zu construiren. Weil er weiß, daß zwei rechte Winkel gerade so viel austragen, als alle berührende Winkel, die aus einem Punkte auf einer geraden Linie gezogen werden können, zusammen, so verlängert er eine Seite seines Triangels, und bekommt zwei berührende Winkel, die zweien rechten zusammen gleich sind. Nun theilt er den äußern von diesen Winkeln, indem er eine Linie mit der gegenüberstehenden Seite des Triangels parallel zieht, und sieht, daß hier ein äußerer Winkel entspringet, der einem innern gleich ist, u. s. w. Er gelangt auf solche Weise durch eine Kette von Schlüssen, immer von der Anschauung geleitet, zur völlig einleuchtenden und zugleich allgemeinen Auflösung der Frage. Das Nächste also, was wir von der geometrischen Methode zu merken haben, besteht darin, daß der Geometer, sobald er den Gegenstand seiner Untersuchung durch Erklärungen festgesetzt hat, sofort

von demselben zur Construction eilet, und durch eine sorgfältige Betrachtung derselben das, was er von seinem Gegenstande lernen will, aufzufinden sucht. Da er seine Constructionen keiner Erfahrung abborgt, und bei der Betrachtung derselben alles aus der Acht läßt, was sie zu einzelnen Objecten macht: so führt ihn die Construction auch immer zu allgemeinen Eigenschaften, und er ist sicher, daß das, was er auf diese Weise an den Constructionen entdeckt, nothwendig auch den ihnen entsprechenden Gegenständen zukommen müsse. Welch ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal der geometrischen Methode zeigt sich uns daher hier! Wenn in andern Wissenschaften das Besondere im Allgemeinen betrachtet wird, so untersucht man in der Geometrie das Allgemeine im Besondern, ja gar im Einzeln. Welch einen hohen Grad von Leichtigkeit, Anschaulichkeit und Gewißheit müssen daher die Lehren der Geometrie erhalten?

Ein Lehrbuch der Geometrie muß also zunächst nach den Erklärungen, von welchen es anfängt, Regeln zur Construction der erklärten Begriffe enthalten, und so kommen wir unvermerkt zu dem wahren Gesichtspunkte, aus welchem das, was darin unter dem Namen, Forderungen, zu stehen pflegt, betrachtet werden muß. Vermittelst dieser Forderungen construirt man zuvörderst die gegebenen Begriffe so, daß man dadurch bloß die in den Begriffen enthaltenen Merkmale dem Auge darstellt; dann aber verwandelt man auch durch sie

diese erste Constructionen in solche, durch deren Betrachtung auch andere nicht in den Begriffen liegende Eigenschaften auf eine überzeugende Art entdeckt werden. Euclides hat drei Forderungen; die erste ist: Von jedem Punkte zu jedem andern eine gerade Linie zu ziehen; die andere: Jede begrenzte gerade Linie stetig in gleicher Richtung zu verlängern; und die dritte: Aus jedem Punkte in jedem Abstande einen Zirkel zu beschreiben. Da es eine doppelte Art der Construction giebt, eine nemlich, die bloß vermittelst der Einbildung zu Stande gebracht, zweitens die, welche nach jener auf dem Papier oder etwas dergleichen gemacht wird: so verlangen auch die angeführten Forderungen, daß das in ihnen Benannte entweder bloß in Gedanken, oder auch außerdem auf dem Papiere u. d. gl. dargestellt werde. Hat man einen zu betrachtenden Gegenstand gehörig nach diesen Forderungen behandelt, so kommt es nur darauf an, die dadurch entstandenen Constructionen mit der erforderlichen Aufmerksamkeit, und nach den allgemeinen Regeln der Wahrnehmung bei geometrischen Gegenständen zu betrachten, um stets von der Anschauung geleitet zur Entdeckung alles dessen zu gelangen, was sich von dem gedachten Gegenstande behaupten läßt. Ehe daher in einem Lehrbuche der Geometrie zu den Aufgaben und Lehrsätzen fortgegangen wird, müssen jene allgemeine Regeln mitgetheilt werden, und wir finden dergleichen im Euclides unter dem Namen, Axiome, oder Grundsätze, worunter Sie Sich also eben so sehr solche

Sätze zu gedenken haben, die den Grund von dem Folgenden enthalten, als Sätze, die in keinen höhern und allgemeinern Sätzen gegründet sind, und also auch keines Beweises bedürfen. Auch erhellt hieraus, daß Sie bei den Forderungen und Grundsätzen vorzüglich auf die Fertigkeit, von ihnen, so oft es nöthig ist, einen geschickten und zweckmässigen Gebrauch zu machen, sehen, und Sich dieselbe durch häufige Uebung zu verschaffen suchen müssen. Die Axiome selbst mögen Sie Sich aus dem Euclides bekannt machen. Daß ich aber die Forderungen vorzüglich als Regeln zur Construction geometrischer Gegenstände, und die Axiome als allgemeine Regeln der Wahrnehmung der Eigenschaften derselben betrachte, dazu bewegt mich der Nutzen, den man von den Forderungen und Grundsätzen erhalten kann, wenn man sie aus diesem Gesichtspunkte ansieht, und der, kurz ihn zu beschreiben, darin besteht, daß man alsdann vermittelst ihrer aus den vorher festgesetzten Erklärungen, als aus Quellen, alles das, und zugleich in einer sehr leicht zu übersehenden Ordnung, ableiten kann, was sich von den erklärten Gegenständen behaupten läßt. Man darf da nur diese Gegenstände in der Ordnung nehmen, in welcher man sie gefunden hat, sie construiren, die Constructionen derselben nach den Forderungen verändern, auf diese veränderten Constructionen so viel als möglich die Axiome oder Grundsätze anwenden, und nicht eher zu einem neuen Gegenstande fortgehen, als bis man auf dem eingeschlagenen Wege nichts mehr zu finden im Stande

ist.

ist. Kehrt man dabei, wenn ein schon betrachteter Gegenstand hinterher von einer neuen Seite erwogen werden kann, wieder zu demselben zurück, und benutzt man, so viel als möglich, das bereits Gefundene ebenfalls als Mittel zu neuen Entdeckungen: so hält es nicht schwer, das ganze Gebäude der Geometrie aus sich selbst gleichsam herauszuspinnen. Um Ihnen über diese wichtige Sache noch einige deutlichere Winke zu ertheilen, mag eine kleine, wenn auch vielleicht sehr unvollkommene, Probe diesen Brief beschließen.

Die Construction eines Punktes würde weiter nichts bemerken lassen, als was bereits in der Erklärung desselben enthalten ist, nemlich, daß ein Punkt sey, was keine Theile hat. Wir gehen also zur Linie, und insbesondere zur geraden Linie fort, wozu wir auch auf die Art gelangen können, wenn wir uns zwei außer einander befindliche Punkte gedenken, und zwischen denselben nach der ersten Forderung eine gerade Linie ziehen. Da die Construction, die wir auf diese Art erhalten, uns abermals weiter nichts zeigt, als was bereits in der Erklärung der geraden Linie enthalten ist: so müssen wir nun die andern Forderungen zu Hülfe nehmen. Hätten wir also die gerade Linie AB Fig. 1. gehabt, so würden wir dieselbe nach M verlängern, und aus A und B mit AB die beiden Zirkel beschreiben, welche die erste Figur darstellt, und welche sich in den beiden Punkten C und D schneiden. Nun aber zeigte sich eine neue Gelegenheit, die erste Forde-

rung anzuwenden, und so erhielten wir durch die Ziehung der geraden Linien AC, BC, AD, BD die ganze erste Figur. Bei einer aufmerksamen Betrachtung derselben, und einer steten Anwendung der Axiome ergiebt sich, daß AB gleich AC, BA gleich BC, und folglich auch AC gleich BC und also das Dreieck ACB ein gleichseitiges Dreieck über der geraden Linie AB sey. Ferner ist AB gleich AD, BA gleich BD, folglich auch AD gleich BD, und also auch das Dreieck ABD ein gleichseitiges Dreieck über der geraden Linie AB. Endlich ist BE gleich BA, und also von der unbegrenzten geraden Linie BM ein der AB gleiches Stück BE abgeschnitten worden. Bemerken wir nun die Art und Weise, theils, wie die gleichseitigen Dreiecke über der geraden Linie AB beschrieben, theils von der unbegrenzten geraden Linie BM das der AB gleiche Stück abgeschnitten worden ist: so gelangen wir zur Auflösung zweier Aufgaben, die die erste und dritte in Euclid's Elementen sind. Auch unterscheidet sich die Auflösung, die wir auf diesem Wege für die erste Aufgabe finden, ganz und gar nicht von der Euclideischen; für die zweite Aufgabe aber erhalten wir eine kürzere Auflösung, und auf die zweite Euclideische Aufgabe, die man aber auch entbehren kann, und die daher auch von den neuern Geometern ganz übergangen wird, kommen wir dabei nicht. Bei der Auflösung der ersten Aufgabe kann endlich auch die Frage entstehen: Ob zwei Zirkel, die aus den Endpunkten einer geraden Linie mit dieser Linie beschrieben werden, sich immer in zwei Punkten schneiden? und diese Frage nebst andern

dern ähnlichen, die bei dem Folgenden aufstoßen, führt auf die Nothwendigkeit, vor der Betrachtung der geometrischen Gegenstände in ihren Constructionen eine sorgfältige und ausführliche Zergliederung ihrer Begriffe, so wie auch der Forderungen und Grundsätze, nach welchen man die Constructionen derselben behandelt und untersucht, vorhergehen zu lassen. Um auf dem betretenen Wege weiter fortzufahren, so betrachten Sie das gleichseitige Dreieck, welches Sie construiren gelernt haben, weiter, und zeichnen Sie es, um Sich die vorzunehmende Untersuchung zu erleichtern, besonders, und ohne die Linien, welche dazu nicht unmittelbar gehören. Nach der zweiten Forderung können Sie dessen Seiten verlängern, nach der zweiten Aufgabe von diesen Verlängerungen gleiche Stücke abschneiden, und dann bekommen Sie wieder Gelegenheit zur Anwendung der ersten Forderung. Um indeß nichts Unnützes und Ueberflüssiges zu thun, dürfen Sie alles dies bei nicht mehr als zwei Seiten vornehmen, und dann erhalten Sie die zweite Figur. Betrachten Sie dieselbe mit der gehörigen Aufmerksamkeit, so finden Sie zwei Dreiecke ABG und A F worin zwei Seiten des einen zweien Seiten des andern, stückweise genommen, so wie auch die in beiden Dreiecken von diesen gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel, gleich sind; und behandeln Sie diese Dreiecke nach den Axiomen, insbesondere nach dem achten, gehörig, so finden Sie ferner, daß dergleichen Dreiecke einander decken, und also auch einander in allen Stücken gleich seyn müssen. Auf diese Art hätten

Sie also Euclid's vierten Satz, und von der zweiten Figur auch die Gleichheit der Linien BG und FC, und der Winkel BGC und BFC gefunden. Dies Letztere setzt Sie in den Stand, den gefundenen Lehrsatz sogleich auf die Dreiecke BGC und BCF anzuwenden, und dadurch lernen Sie, einmal, daß die Winkel BCG und FBC, desgleichen CBG und BCF einander gleich sind; so wie aus diesem Letztern, verbunden mit der Folge aus der Gleichheit der Dreiecke ABG und ACF, daß ABG gleich ACF, folgt, daß auch ABC gleich ACB sey. Ueberlegen Sie nun, daß Sie auf die Größe der Seite BC hierbei gar nicht gesehen, und also das Dreieck ABC bloß als ein gleichschenkliches Dreieck betrachtet haben; und benennen Sie ferner alle gefundenen Dinge mit Worten: so führt die angestellte Betrachtung gerades Weges zu Euclid's fünften Satze, so wie sich davon leicht zu dem sechsten gelangen läßt, weil dieser nur eine Umkehrung von ihm ist. Auch wußten wir unmittelbar nach der gefundenen Gleichheit der Dreiecke ABG und ACF, daß in den beiden Dreiecken BCF und BCG alle drei Seiten stückweise genommen einander gleich waren; und da wir uns nachher, wiewohl aus einem andern Grunde, von der Gleichheit dieser Dreiecke überzeugten, so frägt sich, ehe wir weiter gehen, ob sich nicht diese Gleichheit auch daraus herleiten lasse, weil alle drei Seiten, stückweise genommen, einander gleich sind? Die Untersuchung dieser Frage führt auf Euclid's siebenten und achten Satz, die auch allenfalls in einen Satz zusammengezogen werden könnten. So weit kom=

kommen wir durch die Betrachtung der ersten Figur, so lange darin die durch Punkte angezeigte Linie CD, welche die Linie AB in F schneidet, nicht gezogen ist. Nehmen Sie nun aber auch diese Linie CD zu Hülfe; so ergiebt sich vermittelst der bereits gefundenen Sätze, einmal, daß das Dreieck ACD dem Dreiecke DCB, und also auch die Winkel ACD und DCB einander gleich, und folglich der Winkel ACB durch die Linie CD in zwei gleiche Theile getheilt worden sey. Dies vorausgesetzt sieht man ferner bald, daß auch die Dreiecke ACF und FCB einander gleich, also, weil daher AF gleich FB, die Linie AB durch die Linie CD halbiret, und AFC gleich CFB, und jeder ein rechter Winkel sey. Ueberlegt man also die Art und Weise, wie man die Linie CD erhalten hat, so entdeckt man vermittelst der der ersten Figur auch die Auflösung der Aufgaben, welche den neunten bis zwölften Satz im Euclides ausmachen, und zwar auch in eben derselben Ordnung. Aber nun müssen Sie zu einem neuen Gegenstande fortgehen, und das ist denn, nach einiger Ueberlegung, kein anderer, als der ebene und geradlinige Winkel. Construiren Sie dergleichen, und verlängern dann erst den einen Schenkel, so kommen Sie auf Euclid's dreizehnten, so wie durch die Umkehrung von diesem, auf dessen vierzehnten Satz. Ferner führt die Verlängerung beider Schenkel auf Euclid's funfzehnten Satz, und endigt zugleich die Betrachtung der ebenen und geradlinigen Winkel an dem gegenwärtigen Orte. Den Zirkel sind wir durch das Bisherige noch nicht im Stande

so

so zu construiren, daß die Entdeckung neuer, und nicht in dem Begriffe desselben liegenden Eigenschaften dadurch gehörig vorbereitet würde; es folgt also nunmehr das Dreieck, und es ist leicht einzusehen, wie die Verlängerung einer Seite desselben zu Euclid's sechszehnten Satze führen könne? Um aber über diese Materie nicht zu weitläuftig zu werden, bemerke ich nur allgemein, daß man, wenn man auf die angefangene Art fortfährt, nach und nach nicht nur zu allen im ersten Buche der Euclideischen Elemente enthaltenen Sätze gelange, sondern auch jeden gerade an dem Orte finde, den ihm Euclides angewiesen hat; einzig und allein seinen zweiten Satz ausgenommen, über den ich mich aber bereits erklärt habe. Gelegentlich mehr davon.

Vierter Brief.

2. Ueber die geometrischen Aufgaben, Lehrsätze und Zusätze, und über die dabei vorkommende doppelte Art der Beweise; desgleichen über die Beschaffenheit und den Gebrauch geometrischer Elemente.

Auch die kurze Probe von dem Verfahren des Geometers, die ich Ihnen in meinem letzten Briefe vorgelegt habe, beweiset, daß derselbe in seinen Untersuchungen nicht weit kommen würde, wenn er nicht alle Entdeckungen, die er macht, sogleich als neue Ent-

Erleichterungsmittel seiner Untersuchung brauchte, und so zu sagen mit jeder erworbenen Kenntniß sogleich wucherte. Daraus entsteht denn aber auch für ihn die Nothwendigkeit, sich von diesen Entdeckungen nicht nur auf die Art zu versichern, daß er sich von ihrer Wahrheit auf das festeste überzeugt, sondern sie sich auch so zuzubereiten, daß er sich dieselben, so oft er will, und zugleich mit den Gründen, worauf sie beruhen, wenn auch nicht mit der Art und Weise, wie sie gefunden werden können, wieder gegenwärtig zu machen im Stande ist. Er sondert sie daher, so wie er sie findet, als besondere Sätze von einander ab, und nennet sie Aufgaben, wenn dadurch etwas bewerkstelliget wird, und Lehrsätze, wenn sie bloß behaupten, daß etwas sey oder nicht sey. Lassen sich aus diesen Sätzen durch eine leichte Folgerung andere merkwürdige Sätze herleiten, so fügt er selbige jenen unter dem Namen der Zusätze bei. Zu einer Aufgabe gehört einmal der wörtliche Ausdruck derselben, oder die Aufgabe an und für sich genommen; zweitens die Erläuterung derselben an einer Figur; drittens die Auflösung der Aufgabe, oder die Anweisung, das in ihr Verlangte zu bewerkstelligen; und endlich der Beweis, daß dadurch der Aufgabe ein Genüge geschehe. Die beiden ersten Stücke werden indeß häufig zusammen gezogen. Zu einem Lehrsatze hingegen wird erfordert erstlich die wörtliche Anzeige desselben, oder der Lehrsatz an und für sich genommen; zweitens die Erläuterung davon an einer Figur; drittens die Vorbereitung zum Beweise,

und viertens endlich der Beweis selbst. Was die Zusätze betrift, so fällt bisweilen nicht sogleich in die Augen, wie sie nichts weiter als Folgerungen aus dem vorhergehenden Satze sind, und dann muß man die Anzeige davon dem Zusatze selbst beifügen. Und da die beschriebene Absonderung der gefundenen Sätze deswegen unternommen wird, damit man jeden desto leichter wiederfinden könne: so wird daher auch die Bemerkung ihrer Ordnung durch Zahlen wichtig, indem dadurch die so oft nöthige Berufung auf das vorhergehende außerordentlich erleichtert wird. Der Mathematiker geht also nach den Forderungen und Grundsätzen allerdings zu Aufgaben, Lehrsätzen und Zusätzen fort, und wir finden solches auch in Euclid's Elementen; aber das Wichtigste bei diesem Verfahren besteht darin, daß der Geometer alles auf ganz unumstößliche Gründe baut, und keinen Schritt thut, den er nicht auf die ersten von jedermann zugestandenen Grundsätze zurückführen könnte. Ich will mich jetzt nicht bei der Behauptung aufhalten, daß bloß die Mathematik Demonstrationen im eigentlichen und strengsten Verstande enthalte, auch sie mögen Sie, sobald Ihre Kräfte dazu hinreichen werden, in der schon öfter angeführten Critik der reinen Vernunft S. 734. f. lesen; ich begnüge mich, ein Paar Worte über die doppelte Art der Beweise herzusetzen, deren sich der Mathematiker zu bedienen pflegt. Zu einem vollkommenen Beweise gehört nicht bloß, daß man zeige, es sey etwas von dieser und jener Art, sondern man muß darthun, daß es

so

so seyn müsse; und dies thut der Mathematiker entweder gerade zu, oder indirecte, d. h. so, daß er beweiset, daß das Gegentheil unmöglich sey. Bei dem directen Beweise wird der Zusammenhang der zu beweisenden Behauptung mit andern bekannten, und entweder an und für sich außer allen Zweifel gesetzten, oder bereits vorher unumstößlich bewiesenen Sätzen, durch Anführung der zwischen beiden befindlichen Mittelsätze dargelegt; bei dem indirecten aber gezeigt, daß alles das falsch sey, was der zu beweisenden Behauptung entgegen steht, und daher auf die Wahrheit dieser Behauptung geschlossen *). Diese Beweisart nennt man auch die apogogische Beweisart, und bedient sich ihrer vorzüglich bei den umgekehrten Sätzen, deren Allgemeinheit erst bewiesen werden muß, und wohin alle die gehören, welche man durch die Umkehrung allgemein bejahender Sätze erhält. Auch bei den Beweisen legt der Geometer seine Constructionen zum Grunde, und läßt sich auch da von der Anschauung leiten. Er hat also auch hier vor jedem andern methodischen Untersucher einen unleugbaren Vorzug,

*) *Directa* probatione id agimus ipsum, vt ipse nexus, ipsa relatio idearum, ope verorum principiorum intermediorum, satis patefiat; cum *indirecta* (apogogica) proxime illud tantum spectetur, vt convincatur quod assertioni nostrae contrarium est; quo falso inuento, ad ipsum nostrum assertum verum pronuntiandum recte progredimur. Institutt. Logicae et Metaphysicae Aut. Io. Aug. Henr. Vlrich, Ienae MDCCLXXXV p. 252. §. 249.

zug, und es ist das, was er vermittelst der Constructionen zeigt, nicht nur so wie er es lehrt, sondern es muß, wegen der Natur der Constructionen, nothwendig so seyn.

Sie kennen nun das Verfahren des Geometers so weit, als Sie es jetzt zu kennen nöthig haben, und Ihr künftiges Studium der Geometrie nach den beiden Hauptlehrbüchern derselben, wird Ihre Kenntniß von Zeit zu Zeit schon immer mehr erweitern. Stellen Sie Sich jetzt vor, daß Sie ohne alle äußere Hülfsmittel die Geometrie erfinden, und die Elemente derselben schriftlich verfassen wollten; was würden Sie dem Papier anvertrauen? Die Art und Weise, wie sie von einem Gegenstande zum andern gekommen, und die Eigenschaften derselben nach und nach gefunden, nicht; und eben so wenig das, was sich durch eine bloße Zergliederung, oder Anwendung auf weniger allgemeine Fälle ergäbe. Also einmal die Erklärungen der Gegenstände, die untersucht werden sollten; dann die Forderungen und Grundsätze, um des nach S. 20. f. von ihnen zu machenden Gebrauchs willen; und endlich die Aufgaben, Lehrsätze und Zusätze, die sich nach den Forderungen und Grundsätzen aus jenen Erklärungen herleiten ließen: aber alles dies bloß der Hauptsache nach, obgleich die Aufgaben mit ihrer Auflösung, und die Lehrsätze mit ihrem Beweise. Und weil es zu schwer zu übersehen seyn würde, wenn Sie dabei mit einem Male alle Erklärungen der Geometrie anführen, und die daher abzuleitenden

Auf-

Aufgaben und Lehrsätze ohne alle Abtheilung neben einander setzen wollten: so würden Sie dabei unstreitig auf bequeme Abschnitte denken, und Ihre Elemente auch in mehrere Bücher vertheilen.

Was könnte es schaden, wenn wir uns die Entstehung und Beschaffenheit der Euclideischen Elemente auf diese Art gedächten? Zwar ist es bekannt, und wird in der Folge auch gelegentlich bemerkt werden, daß Euclid von den wenigsten in seinen Elementen enthaltenen Sätzen der Erfinder ist. Allein die Anordnung dieser Sätze zu einem so vortreflichen System, als er uns geliefert, und eben deswegen auch, außer mehrern Sätzen selbst, ihre Form, rührt doch offenbar von ihm her; und ich weiß nicht ob er seinem Werke eine so große, und dabei so leicht zu empfindende, und eben deswegen von jeher so allgemein empfundene Vollkommenheit würde haben geben können, wenn er nicht sich vorgestellt hätte, wie das Ganze ohne alle äußere Hülfsmittel, gefunden und zu Stande gebracht werden könne? Nehmen wir aber dieses an, so fliessen daher für den Gebrauch der Euclideischen Elemente folgende Regeln.

Es ist in Ansehung der Erklärungen gerade das wenigste, was man zu thun hat, daß man sich den Wortverstand derselben merket, und sie so seinem Gedächtnisse einpräget. Man muß vielmehr einmal diese Erklärungen selbst zu finden suchen, und zwar zugleich in der Ordnung, in welcher sie in den

Elementen angetroffen werden, und dann muß man die Merkmale derselben so weit als möglich zergliedern, und seine Begriffe so ausführlich, als es irgend angeht, machen. Man kann hierbei öfters von wirklichen Gegenständen Gelegenheit zu Erläuterungen nehmen; allein wenn man es thut, so muß man ja nicht vergessen, daß man in der Geometrie das Abstracte durch Vergleichung mit Sinnlichem bloß der Fassungskraft der Schwachen näher rücken, aber nicht jenes auf dieses bauen dürfe.

Die Forderungen und Grundsätze zu verstehen, und jener Möglichkeit und dieser Wahrheit einzusehen, ist etwas, was man von jedem verlangen kann, der die Bedeutung der Worte, in welche sie eingekleidet sind, verstanden haben will. Aber des oben angeführten Gesichtspunktes wegen, und weil die Forderungen und Grundsätze ganz allgemeine Sätze sind, muß man desto mehr auf eine Fertigkeit, von ihnen in vorkommenden Fällen Gebrauch zu machen, denken, und daher sogleich mit ihrer Erlernung eine Anwendung auf die nächsten ihnen untergeordneten Fälle, und eine Betrachtung der Umstände, unter welchen ihre Anwendung überhaupt nothwendig wird, verbinden.

Die Aufgaben und Lehrsätze sind die Resultate der über die durch die Erklärungen festgesetzten Gegenstände nach den Forderungen und Grundsätzen angestellten Untersuchung des Geometers. Was man aus sich selbst nehmen kann, muß man nicht

von

von andern entlehnen, und was man allein zu finden im Stande ist, sich nicht von andern weisen lassen. Auch die Aufgaben und Lehrsätze lassen sich nach allgemeinen Regeln finden; aber wenn das zu schwer ist, so muß man wenigstens, so oft man an eine Aufgabe kommt, ihre Auflösung, und wenn ein Lehrsatz folgt, seinen Beweis selbst zu finden suchen. Ueber die Art und Weise, wie man sich dabei zu nehmen, und dieses Geschäfte zu erleichtern hat, werde ich Sie an einem andern Orte unterrichten. Dann findet man aber in Elementen auch nur die allgemeinen Aufgaben und Lehrsätze, und die aus ihnen fließenden untergeordneten sind dem Suchen des Lesers überlassen. Auch daher entsteht eine neue Pflicht. Endlich sind die Auflösungen und Beweise in Elementen, durch die darin nothwendige Absicht bei diesen Dingen, bestimmt, und man findet daher immer nur eine Auflösung und einen Beweis. Es befördert aber die Geläufigkeit der Kenntniß ungemein, wenn man diese Absicht von Zeit zu Zeit ändert, und dann andere Auflösungen und andere Beweise sucht, und diese mit jenen vergleichet, und man muß daher auch dieses nicht unterlassen.

Es wäre sehr leicht, diese Regeln mit verschiedenen andern zu vermehren, und außerdem würde es Ihnen gewiß auch nicht unangenehm gewesen seyn, wenn ich die hier ertheilten allgemeinen Vorschriften an einem oder dem andern Beispiele zu erläutern gesucht hätte. Ich behalte mir aber beides

des bis dahin vor, wo Sie zugleich zur wirklichen Ausübung dieser Regeln Veranlassung haben werden; und werde auf diese Art die gegenwärtigen vorläufigen Betrachtungen in meinem nächsten Briefe beschließen.

Fünfter Brief.

Ueber die Nothwendigkeit des Studiums der Geometrie für jeden Studirenden.

Der Handwerksmann lobt seine Profession, der Künstler seine Kunst, und der Gelehrte überhaupt die Wissenschaft, die er zu seiner Hauptbeschäftigung erwählt hat, vor andern, und öfters auf Unkosten dieser; aber wenn der Geometer seiner Wissenschaft einen Vorzug beilegt, so hat er dazu ein größeres Recht, und gar nicht nöthig, irgend einer andern Disciplin zu nahe zu treten. Unter denen, die die Geometrie, so wie auch die ganze reine Mathematik, über alle andere Wissenschaften erheben, verdient vorzüglich der schon öfters erwähnte Herr Professor Kant, ein Philosoph der ersten Größe, in seiner Critik der reinen Vernunft, angeführt zu werden, und auf seine Behauptungen werde ich mich vorzüglich stützen, wenn ich Ihnen die Nothwendigkeit des Studiums der Geometrie für jeden Studirenden zu zeigen suchen werde. Hier ist doch offenbar nicht Vorliebe, sondern Wahrheit allein, der Bewegungsgrund. Für eine sehr nützliche Vorberei-

bereitung zur Erlernung der Wissenschaften und insbesondere der Philosophie, hat man das Studium der Geometrie von jeher gehalten. Unter den alten Philosophen machten es verschiedene und insbesondere Plato ihren Schülern zur Pflicht, den Verstand vor der Erlernung der Philosophie durch das Studium der Geometrie zu schärfen. Wie er darüber dachte, erhellet unter andern aus einer Stelle im 7ten Buche seiner Republik, wo er den Socrates zum Glaucus sagen läßt: „Es scheint, du fürchtest, der Pöbel werde dir vorwerfen, daß du unnütze Wissenschaften in deinen Erziehungsplan bringest. Die Wissenschaften, wovon wir reden, haben wohl noch einen andern Nutzen, den nemlich, daß sie das Organ der Seele, das durch die übrigen Beschäftigungen des Lebens ausgelöscht und geblendet ist, wieder reinigen und beleben; ein Organ, dessen Erhaltung tausendmal wichtiger ist, als die Erhaltung der Augen des Leibes." Sehr übereinstimmend damit ist das Urtheil des Verfassers der medicinae mentis des Herrn von Tschirnhausen, in der zu Anfange dieses Jahrhunderts Leipzig 1708 herausgegebenen **gründlichen Anleitung zu nützlichen Wissenschaften, absonderlich zu der Mathesi und Physic**, S. 17. „Was den Nutzen des Studii mathematici anlanget, so wird desselbigen, so am meisten zu consideriren, und von der größesten Wichtigkeit ist, von denen, so dies Studium fürnemlich empfehlen, wenig oder gar nicht gedacht. Denn sehr wohl zu bemerken, daß das Studium mathematicum so groß nicht an sich

selbst zu schätzen (obschon es seinen Nutzen zu Wasser und zu Lande, im Kriege und im Frieden giebt) als der herrlichen Methode halber, deren sich die Mathematici bedienen, und warum es fürnemlich von allen, welche die Wahrheit ernstlich lieben, fleißig sollte erlernt werden. Denn weil der Verstand der Menschen auf alle Weise verderbt ist, die Wahrheit zu erkennen, und solcher mit tausend Scrupeln und Finsternissen, oder tausend falschen Meinungen umgeben, was sollte besser seyn, solchen durch natürliche Mittel wiederum in rechten Stand zu setzen, als wenn erstlich einer viel Demonstrationes lieset, und recht faßt, in welchen nichts anders, als klare Wahrheiten ohne Vermischung einiges Falschen enthalten, vorkommen? und wenn nichts anders in der Mathesi anzutreffen, so sollte nur dies allein einen rechten Liebhaber der Wahrheit bewegen, solche zu erkennen, damit er bei sich selbst durch eigene Experienz erführe, ob es denn wahr, was alle Mathematici fürgeben, daß sie Wahrheiten, die so tief verborgen liegen, daß vielmal in vielen Seculis die subtilsten Köpfe solche nicht zu entdecken vermocht, dennoch selbige so gewiß solche zu demonstriren vermögen, daß, wenn auch die ingenieusesten Leute der Welt das Contrarium behaupten wollten, sie einem, der ihre Demonstration sich eigen gemacht, nicht den geringsten Scrupel beibringen könnten.“ Ich könnte diesen beiden Zeugnissen noch viel andere beifügen, aber ich will lieber die Gründe einzeln hersetzen, um wel-

welcher willen das Studium der Mathematik jedem Studirenden wichtig und nothwendig ist.

Vorbereitung zur Erlernung der Wissenschaften und insbesondere der Philosophie ist das Studium der Geometrie vorzüglich aus einem doppelten Grunde. Einmal halten die Gegenstände der Geometrie, da sie durch die Constructionen sinnlich dargestellt werden, das Mittel zwischen den sinnlichen und solchen abstracten Gegenständen, welche einzig und allein für die Vernunft gehören. Unmittelbar von jenen, an welchen wir immer unsere Kräfte zuerst üben, zu diesen, als dem Stoff der höhern Wissenschaften, fortzugehen, ist wider die bei jeder Uebung des Verstandes nöthige Stufenfolge, und daher immer mit Nachtheil verknüpft; aber durch die Geometrie wird die zwischen beiden befindliche Lücke ausgefüllt. Zum andern darf man in der Geometrie mit keinen andern als deutlichen Kenntnissen, und nicht eher, als bis man unumstößliche Gründe davon eingesehen hat, zufrieden seyn. Man gewöhnt sich also durch das Studium derselben auch, nie bei dunkeln Vorstellungen stehen zu bleiben, und allenthalben nach dem Grunde zu fragen; eine Gewohnheit, die für jeden, der sich den Wissenschaften widmet, von der äußersten Wichtigkeit ist. Auch beweiset es die Erfahrung, daß jeder, der sich durch das Studium der reinen Mathematik überhaupt und der Geometrie insbesondere vorzubereiten gesucht hat, überall

mit einer größern Leichtigkeit, und schnellern Schritten fortzugehen im Stande ist.

Noch nothwendiger wird das Studium der Geometrie, wenn man bedenkt, daß diese Wissenschaft durchaus ein Inbegriff von Lehren ist, deren Wahrheit nicht nur auf den unwiderleglichsten Gründen beruht, sondern auch mit einer Deutlichkeit und Evidenz eingesehen werden kann, als in keiner andern Wissenschaft möglich ist. Es kann daher nicht fehlen, daß derjenige, der diese Wissenschaft mit Ernst treibt, indem er seinen Verstand unaufhörlich mit unleugbaren Wahrheiten beschäftiget, das Wahrheitsgefühl in sich erwecke, stärke und vervollkommne, ein Vortheil, über dessen Wichtigkeit ich nicht erst noch zu reden brauche. Dies Wahrheitsgefühl ist ein Theil dessen, was man mathematischen Geist nennt, der auch außer der Mathematik uns begleitet, und um dessen willen allein es Niemand gereuen kann, auf die Erlernung dieser Wissenschaft einen Theil seiner Zeit und Mühe verwandt zu haben.

Auch das Vermögen, Wahrheiten zu erfinden, oder das Unbekannte aus dem Bekannten herzuleiten, wird durch das Studium der Geometrie mehr als durch irgend eine andere Wissenschaft geübt und vervollkommt. Denn wo ist eine Wissenschaft, die dazu so viel Gelegenheit darböte, als eben die Geometrie? Ueberhaupt darf man, wenn man die Regeln kennen lernen will, welche der menschliche Verstand

stand bei der Untersuchung und Erforschung der Wahrheit zu beobachten hat, nur den Weg betrachten, welchen man bei der Erlernung der Geometrie gehen muß. Ein in dieser Rücksicht sehr nützliches Buch, durch dessen Lesung Sie künftig Sich hiervon werden überzeugen können, ist die Einleitung in die Philosophie, welche Jacob Hentsch zu Leipzig 1751 *) u. f. herausgegeben hat.

Endlich behauptet man, daß man nur in der Mathematik und insbesondere in der Geometrie vollkommene Definitionen und Demonstrationen finde, und legt überdem dieser Wissenschaft eine Evidenz bei, die in keiner andern zu erhalten sey. Ist das wahr, und der Herr Professor Kant hat es ausführlich gezeigt, so kann man ja, ohne die Geometrie studirt zu haben, nicht einmal auf die erforderliche Art wissen, was zu einer vollkommenen Definition oder Demonstration gehöre, und wodurch eine in aller Absicht befriedigende Evidenz erhalten wer-

*) Introductio plana in Philosophiam, complectens genuinas, iuxta quas intellectus humanus operatur leges, Geometriae Euclideae ope erutas, atque dilucidatas, Conamen I. Auct. Io. Iac. Hentschio. Lips. MDCCLI. Introd. pl. etc. complectens Logicam Quantitatum, ad Elementum I. et II. Euclidis accommodatam Con. II. ib. eod. Philosophia prima ex Euclide restituta complectens notiones communes, metaphysicas vulgo dictas, ex Elem III. et IV. erutas atque dilucidatas Con. III. ib. MDCCLII. Philosphia vniuersalis ex Euclide restituta Con. IV. ad Elem. V. et VI. accommodatum ib. eod.

werde. Wer sein Leben den Wissenschaften widmet, muß freilich die eine oder die andere zu seiner Hauptbeschäftigung machen; aber fremd darf er in keiner seyn, und am allerwenigsten in der, die sich so sehr vor allen andern auszeichnet, und ihre Vortheile über alle andere verbreitet. Auch die geometrische Methode, die doch unleugbar die vollkommenste ist, lernt man nicht anders kennen, als wenn man sich mit der Wissenschaft, von welcher sie den Namen hat, in eine vertraute Bekanntschaft einläßt.

Von dem Nutzen, den das Studium der Geometrie für das gemeine Leben hat, spreche ich hier nicht. Bei Ihrer Denkungsart reicht das Gesagte hin, Ihre Lust zur Geometrie so anzufachen, als es zum glücklichen Fortgange in diesem Studium nöthig ist. In meinem nächsten Briefe werde ich daher zur besondern Erläuterung der Euclideischen Elemente, und der Anfangsgründe des Herrn Hofrath Kästners fortgehen.

Sechster Brief.

Anmerkungen zu den Erklärungen, Forderungen und Grundsätzen des ersten Buchs der Euclideischen Elemente.

Ich habe S. 33. f. einige Regeln gegeben, durch deren Befolgung man sich die in Elementen der Geometrie vorkommenden Erklärungen, Forderungen und Grundsätze zum eigenen Gebrauche gleichsam zuzubereiten hat; und nun will ich über die Erklärungen, Forderungen und Grundsätze des ersten Buchs der Euclideischen Elemente einige Anmerkungen hersetzen, um Sie dadurch zur Anwendung dieser Regeln zu veranlassen, und zugleich dabei zu leiten. Ich setze aber voraus, daß Sie außer Euclid's Elementen, auch des Herrn Hofrath **Kästners** Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie zur Hand haben.

Unter allen geometrischen Begriffen pflegen vorzüglich der Punkt, die Linie und die Fläche Anfängern Schwierigkeit zu verursachen. Da sie gewohnt sind, sich entweder mit ganz sinnlichen Gegenständen zu beschäftigen, oder doch das Abstracte, welches sie untersuchen, in wirklichen Dingen zu gedenken: so suchen Sie auch hier wirkliche und für sich bestehende Punkte, Linien und Flächen auf, und da passen denn natürlicher Weise die Gegenstände, die sie finden, mit den Begriffen, für welche sie die-

selben

selben gesucht haben, nicht zusammen. Sobald man im Stande ist, sich unmittelbar an die gegebenen Erklärungen zu halten, ohne sich darum zu bekümmern, ob dieselben in der Natur ihnen entsprechende Gegenstände haben, oder nicht? und dies sollte man in der reinen Mathematik durchaus thun: so ist es leicht, den gedachten Schwierigkeiten ganz aus dem Wege zu gehen; allein Anfänger können solches nicht sogleich, und man muß ihnen daher zu Hülfe kommen. Das beste Mittel dazu ist, daß man sie die körperliche Ausdehnung, oder den geometrischen Körper denken läßt, und ihnen daran die Fläche, die Linie und den Punkt auf die Art zeigt, wie es der Herr Hofrath Kästner S. 166. 167. §. 4 und 5 gethan hat. Auch der Hr. Hofrath Karsten in Halle hat in seinem Lehrbegriffe der gesammten Mathematik *), im ersten Theile

*) Von diesem vortreflichen Lehrbegriffe sind acht Theile heraus, und die beiden ersten bereits zum zweiten Male wieder aufgelegt. Der erste Theil und die erste Abtheilung des zweiten Theils, wovon jener zu Greifswalde 1782, und diese ebendaselbst 1786, neu aufgelegt erschienen ist, begreifen die Arithmetik, Geometrie, und die ebene und sphärische Trigonometrie. Die zweite Abtheilung des zweiten Theils, Greifswalde 1786 enthält die mathematische Analysis, und die höhere Geometrie; der dritte Theil, ebendaselbst 1769, die statistischen Wissenschaften, nebst den ersten Gründen der Mechanik; der vierte, ebendaselbst und in eben diesem Jahr, die Mechanik der festen Körper; der fünfte, ebendaselbst

Theile S. 204. u. f. dieses Mittel gebraucht, und sagt daselbst §. 1. 4. 5 und 6.: „Wäre ein gewisser Körper z. E. ein Würfel, in zerschmolzen Wachs, oder etwas dergleichen, ganz eingetaucht: so würde das Wachs beim Erkälten rund um an den Körper anhängen. Man setze, der Körper könnte, nachdem das Wachs erkältet, aus demselben herausgebracht werden, ohne daß die Rinde, die ihn allenthalben umgiebt, zerbrochen würde: so würde innerhalb des Wachses eine Höhlung bleiben, mit dem herausgeschaften Würfel von einerlei Gestalt und Größe. Eben diese Höhlung ist der Raum, den der Würfel einnahm, da er noch im Wachs verschlossen war. Einen solchen Raum nimmt der Würfel allenthalben ein, wo man ihn auch hinbringt, und die Größe und Gestalt dieses Raums ist mit der Größe und Gestalt des Würfels allemal einerlei. Man kann sich leicht auf ähnliche Art eine Vorstellung von dem Raume machen, den ein jeder Körper einnimmt. Macht man sich nun von dem

daselbst 1770, die Hydraulik; der sechste, ebendaselbst 1771, die Fortsetzung der Hydraulik und die Pneumatik; der siebente, ebendaselbst 1775, die Optik und Perspectiv; und der achte, ebendaselbst 1777, die Photometrie. Von eben diesem großen Mathematiker haben wir auch Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften in drei Theilen, Greifswalde 1780, die noch ein vierter vollständig machen soll; und auch einen Auszug aus diesen Anfangsgründen, der ebendaselbst 1781 herausgekommen ist.

dem leeren Raum, den ein Körper ausfüllte, da er in demselben befindlich war, auf diese Weise eine Vorstellung: so sieht man leicht, daß dieser leere Raum eigentlich kein Körper heißen könne, ob er gleich einige Eigenschaften des Körpers, der ihn ausfüllte, behält, nemlich Gestalt und Größe. Die übrigen Eigenschaften des Körpers kommen aber auch in der Geometrie gar nicht in Betrachtung, und das ist die Ursache, weswegen dieser leere Raum ein geometrischer Körper heißt. Jeder Körper hat gewisse Grenzen, die ihn von allen Seiten umgeben, und diese äußerste Grenze desselben, die ihn von allen Seiten umgiebt, heißt seine Oberfläche. Man kann sich auch einzelne Theile einer solchen Oberfläche allein vorstellen, dergleichen z. E. die sechs Seitenflächen des Würfels sind: dann aber hat eine solche Fläche wiederum ihre Grenzen, und diese Grenzen der Oberflächen heißen geometrische Linien. Auch hier kann man sich einzelne Theile von der Grenze vorstellen, die eine solche Fläche von allen Seiten umgiebt, die ebenfalls Linien sind: jede Seitenfläche eines Würfels ist von vier solchen Linien eingeschlossen. Auch eine jede Linie hat ihre Grenzen, wo sie anfängt und aufhört. Die Grenzen einer Linie heißen geometrische Punkte. Man kann sich jede Linie, wo man will, getheilt vorstellen, und die Grenze, wo beide Stücke zusammenhängen, wird ein Punkt seyn. Also kann man sich in einer Linie unzählig viele Punkte vorstellen: nur muß man sich hier die Vorstellung nicht machen, als ob eine solche Linie etwa

aus

aus einer Menge an einander gelegter Punkte bestehe.“ Ob man aber gleich auf diese Art Anfängern die Fläche, die Linie und den Punkt beschreiben kann, und auch gewöhnlich zu beschreiben gezwungen ist: so muß man sich ihrer doch nicht weiter als bloß zur Erläuterung bedienen. Man könnte sonst die geometrischen Begriffe von sinnlichen Gegenständen abhängig machen; und dies wäre wider die erste Eigenschaft des Vorwurfes dieser Wissenschaft; und außerdem könnte sich auch wohl daher ein oder das andere Merkmal in die Begriffe einschleichen, welches nicht darin gehörte. Diesem Letztern hat der Hr. Hofrath Kästner durch die S. 165. in den drei ersten §§. vorangeschickten Erklärungen vorgebeugt, die daher hier sehr nothwendig sind. Ueberhaupt müssen Sie das, was Sie S. 165 bis 168 über die daselbst stehenden Erklärungen gesagt finden, zu wiederholten Malen, und mit Aufmerksamkeit lesen. Auch kann ich nicht umhin, Ihnen hier die beiden Aufsätze mitzutheilen, auf welche der Herr Hofrath Kästner S. 167 und S. 168 verweiset. Der erste aus dem Hamburgischen Magazin ist folgender.

„Daß man sich in der Geometrie vorstellt, es entstehe aus der Bewegung eines Punktes eine Linie, ist bekannt, und man weiß auch, wie auf eine ähnliche Art der Ursprung der Flächen und Körper erklärt wird. Ich glaube es wird mehrern so gegangen seyn, wie mir, da diese Sachen mir zuerst vorgetragen wurden. Es schien mir nemlich daraus

aus augenscheinlich zu folgen, eine Linie müsse aus Punkten bestehen. Die Linie AZ, Fig. 3. dachte ich, entsteht, indem sich der Punkt A von A nach Z bewegt, und überall Merkmale oder Spuren hinter sich läßt: was kann sie also anders seyn, als die Summe aller dieser Merkmale, d. i. die Summe aller Punkte, die in ihr befindlich sind. Wenn der Punkt aus A in B, aus B in C aus C in D u. s. w. kommt, und überall solche Merkmale nach sich läßt, kann man nicht sagen, daß A, B, C, u. s. w. nebst allen zwischen ihnen enthaltenen Punkten zusammengenommen die Linie AZ ausmachen?"

„Gleichwohl streiten die Mathematikverständigen wider die Zusammensetzung einer Linie aus Punkten. Es verlohnt sich vielleicht der Mühe, diese Schwierigkeit zu erläutern: wollte ich glauben, es sey nur für mich eine wegen meiner schwachen Einsicht gewesen, so finde ich doch, daß Leute, deren Scharfsinnigkeit ich nicht gering zu schätzen Ursach habe, in dieser Betrachtung *nicht nur eine* Schwierigkeit, sondern wohl einen Beweis, daß die Linie aus Punkten bestehe, zu finden glauben."

„Die Begriffe von den den geometrischen Grössen zu erhalten, fange ich nicht von Punkten, sondern auf dem andern Ende von Körpern an. Ich nehme an, daß ein Körper vorhanden sey, dessen Theile alle zusammenhängen, so, daß wo einer aufhört, gleich der andere anfängt: dieses ist das, was man Continuum nennet. Dieser Körper geht nicht

nicht ohne Ende fort; er hat seine Grenzen, und diese Grenzen heiße ich Flächen. Die Fläche ist da, wo der Körper aufhört, und also kein Theil vom Körper, denn wo noch ein Theil vom Körper vorhanden ist, da hört er nicht auf. Wo Flächen aufhören, sind Linien, und wo Linien aufhören, Punkte. Ich stelle mir also den Punkt nicht als etwas für sich bestehendes vor, das vorhanden ist, ehe die Linie, Fläche und Körper da sind. Wer sich die Sache so einbildet, setzt sich vielen Einwürfen aus. Leute, die sich untheilbare Wesen nicht vorstellen können, halten den mathematischen Punkt alsdann für nichts, und ich wollte wetten, daß die meisten, denen die Sache auf diese Art vorgetragen wird, sich den Punkt als ein klein rund Tüpfelchen vorstellen. Ich gegentheils bin versichert, daß Punkte vorhanden sind, wofern eine stetige Ausdehnung (extensio continua) vorhanden ist, die ihre Grenzen hat; denn diese Grenzen müssen sich endlich in Punkte verlieren."

„Ich stelle mir also die Linie AZ als vorhanden vor; wo sie aufhört, da giebt es Punkte; sie kann aber nicht nur in A und Z aufhören; als eine stetige Größe kann sie sich überall zwischen A und Z endigen; ich will setzen sie hört in der Mitte in M auf. So giebt es in M einen Punkt, sie kann mit eben so viel Recht in D in C u. s. w. aufhören, überall wird es Punkte in ihr geben. Ich habe also überall Punkte in der Linie AZ das ist, ich habe das, was ich haben würde, wenn ich mir den

Punkt A (weil alle Punkte einander ähnlich sind) nach und *nach* in B, C, D, M u. s. w. vorstellte: und das *ist* die Art, wie man darauf kömmt, die Erzeugung einer Linie vermittelst eines bewegten Punktes zu erklären. Man kann sich überall in der *Linie* Punkte vorstellen; das ist, man kann sich überall in ihr einen Punkt, der nach und nach bald da, bald dort ist, vorstellen, oder einen Punkt, der sich durch sie bewegt. Aber in dem Schlusse sehe ich keine Folge: es gibt überall Punkte in der Linie, daher besteht sie aus Punkten. Denn sein Vordersatz heißt so viel als: die Linie kann aufhören, wo man will; folgt aber daraus: sie bestehe aus den Grenzen, an welchen sie aufhört?"

Wenn man sich vorstellt, der Punkt A bewege sich aus A nach Z zu, so wird man sich allezeit seine verschiedenen Stationen, wenn ich so reden darf, B. C. u. s. w. in gewissen Entfernungen von einander vorstellen. Man begreift allemal, daß zwischen A und B Oerter sind, durch welche der Punkt durchgegangen ist, ehe er aus A nach B kam, und eben so nimmt man die folgende Spur C nie so an, daß der Punkt unmittelbar aus B in C käme, sondern man sieht allezeit, daß er nach seinem Ausgange aus B noch an andern von C unterschiedenen Oertern gewesen, ehe er in diesen gekommen ist. Die Linie AZ besteht also nicht aus den Punkten A, B, C u. s. w. sondern aus ihren Zwischenweiten AB, BC u. s. w. Zwo solche Stationen wie D und M z. B. so annehmen, daß zwischen ihnen

ihnen keine andere seyn könnte, das hieße nur eine annehmen, die man mit zwei verschiedenen Namen belegte; alle Mathematikverständige werden alsdann sagen, daß die Punkte D und M zusammen gehen, daß sie nur ein Punkt sind, daß AM so lang ist, als AD, und der Punkt A, wenn er bis in M ist, nicht weiter gekommen ist, als wie er in D war, folglich sich nicht bewegt hat."

„Aber wie kann der Punkt aus D in M, der von D entfernt ist, kommen, ohne durch einen Ort, der D am nächsten war, gegangen zu seyn? Wie kann er in Oerter kommen, die von D durch dazwischen liegende Stellen abgesondert sind, ohne eine Stelle eingenommen zu haben, die von D durch keine dazwischen liegende abgesondert wurde? Eine solche Frage setzt zum voraus, daß es dergleichen Stelle in der Linie DM gebe, das ist, (weil die Stelle eines Punkts auch ein Punkt ist) daß es in DM einen Punkt gebe, der dem Punkte D so nahe sey, daß zwischen ihm und D kein anderer Punkt seyn könne, und doch von ihm unterschieden sey. Eine solche Nachbarschaft der Punkte erkennt die Geometrie nicht. Man heiße diesen Punkt, der so nahe bei D ist, E. Er wird also die Grenze von einem Stücke AE der Linie AZ seyn, wie D solches von AD ist. Das, was von ihm vorausgesetzt wird, zeigt, daß AE und AD gleich lang sind, sonst gäbe ihr Unterschied DE eine Entfernung zwischen D und E. Sind AD und AE gleich lang; so hören beide an einem Orte auf, d. i. D und E

sind nur ein Punkt, da D der Ort, wo AD, und E der Ort ist, wo CE aufhört. Die Frage setzt also was zum Voraus, das der Natur der geometrischen Linie widerspricht, und es ist bekannt, daß man eine Frage auf zweierlei Art auflösen kann, wenn man sie wirklich beantwortet, und wenn man zeigt, daß sie etwas widersprechendes voraussetze.

Ueberhaupt folgere ich hieraus, daß es nicht wohlgethan ist, beim Vortrage der geometrischen Begriffe, von den Punkten anzufangen, aus deren Bewegung Linien, aus dieser Bewegung Flächen u. s. w. zu erzeugen. Dies giebt Gelegenheit, daß man sich die Punkte als Substanzen vorstellt, die eher als das übrige vorhanden sind, und es ist natürlich, daß man nachgehends darauf verfällt, das übrige aus ihnen zusammenzusetzen. Sie sind nichts, als die letzten Grenzen der Körper, und werden also nicht vorhanden seyn, wenn die Körper nicht vorhanden sind. Eine Linie entsteht von einem bewegten Punkte; dieses ist ein Ausdruck, der etwas richtiges zum Grunde hat, aber der leicht zu irrigen Gedanken Anlaß geben kann, wenn man ihn nicht auf die Art erklärt, wie ich gethan habe.“

„Noch eine Betrachtung wird zeigen, daß man sich allezeit die Linie, welche ein Punkt beschreiben soll, eher vorstellt, als die Bewegung dieses Punktes wirklich geschieht. Wenn ich mir den Punkt A ganz allein einbilde, so kann ich ihm keine Bewe-

gung zuschreiben, ohne zugleich an eine gewisse Richtung zu gedenken, nach welcher sie geht: diese Richtung ist aber eben die Linie, die er beschreiben soll. Ehe ich also den Punkt aus seiner ersten Stelle fortrücken lasse, stelle ich mir schon die Linie vor, die seine Bewegung erzeugen soll: Der Begriff dieser Linie ist eher, als der Begriff von seiner Bewegung: der Punkt erzeugt die Linie nicht, er wandert auf einer Linie fort, die ich ihm schon in Gedanken vorgeschrieben hatte, und man weiß, daß in der Geometrie das vorhanden ist, was man sich nur in Gedanken vorstellen darf.'

„Soll ich wohl diesen kurzen Aufsatz durch eine weitläuftige Entschuldigung verlängern, daß ich etwas abgehandelt habe, welches zu den ersten Begriffen der Geometrie gehört? Lehrt nicht die Erfahrung, daß man aus einer lehrbegierigen Ungeduld oft weiter geht, ehe man diese Begriffe zulänglich überdacht hat, und aus Mangel einer deutlichen und vollständigen Erkenntniß derselben, auf Sätze geräth, die nicht vollkommen richtig, oder wohl gar falsch sind?"

Dieser letzte Zusatz kann auch zu meiner Rechtfertigung dienen, daß ich Ihnen die hier mitgetheilte Abhandlung nicht im Auszuge, sondern ohne alle Abkürzung hergesetzt habe. Kennen lernen mußten Sie sie, und in dem Hamburgischen Magazin selbst würden Sie sie wohl so bald nicht gelesen haben. Auch muß ich es gestehen, daß es mir schwer wird, von dem, was der Herr Hofr.

Kästner über einen Gegenstand schreibt, etwas wegzulassen. Mir ist dabei jedes Wort wichtig, und genau genommen gehört auch alles unzertrennlich zur Sache.

Der andere Aufsatz, welchen der Herr Hofr. Kästner anführt, und welcher in dem Leipziger Magazin für die Naturkunde, Mathematik und Oekonomie steht, gehört zwar nicht so nothwendig, als der vorhergehende hierher; ich darf ihn aber gleichwohl nicht übergehen, und ich will auch ihn ganz hersetzen:

„Die Stelle dieses Scholastikers, der unter den Scholastikern seiner Spitzfindigkeit wegen berühmt ist, wird vom Jul. Cäs. Scaliger angeführt, de Subtilitate Exerc. 65. Sect. 4. Scaligers Worte sind folgende: Subtilissimus omnium mortalium Ockam *), in commentario de Euchari-stia

(*) Er lebte am Ende des 13ten und im Anfange des 14ten Jahrh. n. C. G. Brucker in seinen Institutionibus Historiae philosophicae sagt von ihm: Nouam Sectam inter Scholasticos condidit Guilielmus Occamus, Anglus, a patria ita dictus, discipulus Scoti, quem licet obscurissimum, non assecutus modo, sed superare quoque ausus est. Deficiens enim a Scoti Schola, quae Reales secuta est, intermortuam Nominalium Sectam resuscitauit, tantaque subtilitate sectatores suos defendere docuit, vt ad pugnas tandem cruentas lis deuolueretur. Inde venerabilis Inceptoris nomen illi datum est; itemque dictus doctor singularis et inuincibilis. — Scripsit multa, de monarchia ciuili, et in libros Aristotelis, itemque theologica, in quibus ingenium magnum at subtilitatibus imperuiis impedi-

stia scripsit: punctum esse liniae, lineam superficiei, superficiem corporis priuati.onem. Tantum abest, vt rerum haec statuat principia *). Ceterum, ne haec quidem opinio proba est. Habitus enim esset priuatio, aut subiectum priuationis infinitae, namque sunt in corpore superficies. Igitur infinitae corporis priuationes. Tum, ea quae apparet superficies, actu aliqua ex parte est. Quippe qua sub sensum cadit. Itaque, cum sit in corpore aut corporis priuatio, esset aut in ipso habitu, aut ipsius habitus pars. Vnum hoc ex monstris nominalium, quorum equidem ingenia cogor admirari, atque etiam laudare, vt acuta, fugere vt nimis acuta."

„Scaliger mag sich auf diese Widerlegung des Occam was zu gute gethan haben, denn er setzt beim Anfange derselben auf den Rand die Sylben: Subtil. durch die er den Leser auf seine Spitzfindigkeiten aufmerksam macht."

„Und gleichwohl hat Occam vollkommen recht, wenn seine Meinung nur ist: Der Punkt sey die Grenze der Linie, die Linie der Fläche Grenze, die Fläche des Körpers. Das sagen die Geometer, und folgern daraus: die Fläche enthalte nichts

 vom

peditum, nimisque acutum, et vere portentosum, prodidit.

(*) Scaliger hatte zuvor von der Vorstellung geredet, daß durch Bewegung eines Punctes eine Linie erzeugt würde.

vom Körper, die Linie nichts von der Fläche, der Punkt nichts von der Linie: Wer will dem Scholastiker wehren, dieses durch priuatio auszudrücken?"

„In jedem Körper lassen sich unzählige Flächen denken, nur deswegen, weil man den geometrischen Körper, wo man will, aufhören lassen kann, ihm überall Grenzen setzen, wo man will. Infinitae corporis priuationes sind also nicht wie Scaliger glaubt, etwas ungereimtes."

„Als geometrische Fläche fällt eine Fläche nicht in die Sinne. Die geometrischen Körper, Flächen und Linien sind nur Vorstellungen des Verstandes, freilich von Empfindungen abstrahirt. Wenn wir einen Körper empfinden, so empfinden wir auch, daß er sich nicht ins Unendliche erstrecke. Ihn als begrenzt empfinden, das kann ja wohl heißen: Privation seiner Ausdehnung empfinden."

„So denke ich, ist Occams Lehre keine übertriebene Spitzfindigkeit, wenn man sie nur in gewöhnliche Ausdrückungen zu übersetzen weiß."

Dankbar muß ich doch anzeigen, wo ich von dieser Subtilität die erste Nachricht erhalten habe. In M. Christian Wolfs aus Pirna Disputation de linea mathematica. Wittenb. 1625 §. 7. Im Scaliger aber, den ich auf Wolfs Anzeige selbst nachschlug, steht die von mir beigebrachte Stelle,

die

die W. nicht so ausführlich hat. Wolf verwirft Occams Satz ebenfalls. Das halte ich einem Wittenbergischen Magister aus dem vorigen Jahrhunderte nicht zu gute, denn der sollte scholastische Philosophie verstehen. Von unsern Neotericis, Magistern oder Nichtmagistern, darf man freilich nichts fordern, das sie als Grübelei, die ihnen Kopfschmerzen machen würde, verachten."

Genug von den Punkten, Linien und Flächen. Mein nächster Brief wird die übrigen Erklärungen betreffen.

Siebenter Brief.

Fortsetzung der Anmerkungen über die Erklärungen, Forderungen und Grundsätze des ersten Buchs der Euclideischen Elemente.

Haben Sie Sich nicht gewundert, daß ich Ihnen einen so langen Brief über die geometrischen Punkte, Linien und Flächen geschrieben habe? Was ein Punkt, eine Linie, und eine Fläche sey? ist mit wenig Worten erklärt; aber man hat, wenn man sich diese Erklärungen den Worten nach bekannt gemacht hat, nicht sogleich die erforderlichen Begriffe davon. Der stärkste Beweis, den ich Ihnen hiervon geben kann, ist wohl der, wenn ich Ihnen an einem Beispiele zeige, daß auch Männer, die

weit über die Anfangsgründe der Mathematik hinaus waren, darüber nicht ganz richtig gedacht haben. Wir haben Erläuterungen der Kästnerischen Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie von Herrn Johann Friedr. Lempe, die in Altenburg 1781 in drei Theilen herausgekommen sind, und sehr viel Gutes enthalten. Im zweiten Theil S. 7. stehet die Anmerkung: „In der Geometrie sieht man bloß auf Gestalt und Größe, und betrachtet die übrigen Eigenschaften eines wirklichen Körpers gar nicht. Es ist daher gleich viel, ob man sich diesen Raum (welchen ein wirklicher Körper einnimmt) mit irgend einem Körper ausgefüllt vorstellt, oder nicht.“ Also wäre der geometrische Körper, und der Raum, den ein wirklicher Körper ausfüllte, einerlei? Man muß, sagt der Herr Hofr. Kästner S. 165 in der Anmerkung zur dritten Erklärung, eine stetige Ausfüllung des Raums annehmen, sobald man auf die besondere Beschaffenheit der Dinge, welche den Raum ausfüllen, nicht sehen will, und erklärt auch die geometrische Ausdehnung durch einen Raum, den eine stetige Größe ausfüllt. Aber die wirklichen Körper sind ja keine stetigen Körper, selbst nach Hr. Lempe im angeführten Buche S. 6 nicht; und die Geometrie beschäftiget sich nicht mit der Betrachtung wirklicher Körper, ob sich gleich ihre Lehrsätze auf wirkliche Körper anwenden lassen. Aus einem solchen verworrenen Begriffe vom geometrischen Körper können unstreitig keine deutlichen und durchaus richtigen

Begrif=

Begriffe von den Flächen, Linien und Punkten folgen. Auch beweiset solches der S. 8 stehende falsche Schluß: Man wird nun schon sehen, daß die Grenze einer Sache kein Theil an ihr ist: denn sonst müßten z. E. eine Menge über einander gelegter Flächen einen Körper ausmachen: welches doch nicht geschiehet." Jenes ist der Grund von diesem, aber nicht dieses der Grund von jenem. Noch deutlicher fällt es aus folgender Anmerkung in die Augen: Ein zarter nicht sehr langer Faden, auf einem Tische zwischen zweien Punkten ausgespannt, wird in einer geraden Linie liegen, und wenn er bei jeder Lage der Punkte, zwischen den er ausgespannt ist, alle Punkte des Tisches Oberfläche berührt: so wird sie eine Ebene seyn, wenigstens ohne merklichen Irrthum dafür angesehen werden." Dergleichen Erläuterungen geometrischer Gegenstände suchen Sie in des Herrn Hofr. Kästners Anfangsgründen selbst vergebens, und diejenigen, bei denen man solche Versinnlichungsmittel gebrauchen müßte, gäben eben dadurch zu erkennen, daß sie noch nicht zur Erlernung der Geometrie geschickt wären. Doch ich muß abbrechen, um zu einem andern Gegenstande zu kommen.

Es folgt also die Erklärung der geraden Linie, Wenn Ihnen die Euclideische Erklärung: Eine gerade Linie ist, welche den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt, nicht deutlich genug ist, so können Sie dafür die Kästnerische neh-

nehmen: Eine gerade Linie ist, deren Punkte alle nach einer Gegend zu liegen; denn beide sagen mit verschiedenen Worten ein und ebendasselbe. Ueberdenken Sie nur die Erläuterung der Euclideischen Erklärung des Jesuiten Clavius, welche ich hier beigefügt habe *). Man hat noch andere sogenannte Erklärungen der geraden Linie. Proclus, ein Platonischer, oder vielmehr Eclectischer Philosoph, von dem wir einen vortreflichen Commentar über das erste Buch der Euclideischen Elemente **) haben, beschreibt sie durch die Linie, welche

*) Euclides lineam rectam dicit esse eam, quae aequaliter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultat, in qua denique nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis *ad viuum exprimit* filium aliquod tenue summa vi extentum: In eo enim omnes partes mediae cum extremis aequalem obtinent situm, neque vlla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes aequabiliter inter extremos fines progrediuntur.

**) Procli Diadochi Lycii, Philosophi Platonici ac Mathematici probatissimi in primum Euclidis Elementorum librum Commentariorum, ad vniuersam mathematicam Disciplinam principium eruditionis tradentium libri IV. A. Francisco Barocio Patritio Veneto summa opera, cura, et diligentia cunctis mendis expurgati. Scholiis et figuris, quae in graeco codice omnes desiderabantur, aucti: primum iam Romanae linguae venustate donati et nunc recens editi Patauii 1560.

welche genau den Raum einnimmt, der zwischen ihren Endpunkten liegt, und also der Entfernung dieser Punkte von einander gleich ist. Plato erklärt sie so: Eine gerade Linie ist die, deren Endpunkte die zwischen ihnen liegenden verdecken. Campanus, ebenfalls einer von den Commentatoren des Euclides nennt sie die kürzeste Ausdehnung zwischen zweien Punkten, und die Wolfische Erklärung finden Sie in des Herrn Hofr. Kästners Anfangsgründen. Man hat nicht nöthig, die Euclideische oder Kästnerische Erklärung gegen irgend eine andere zu vertauschen, indem diese alles enthalten, was man von einer hinlänglichen Beschreibung der geraden Linie verlangen kann, und die übrigen sich daraus leichter aus ihr, als sie aus ihnen ableiten lassen. Ich setze, dies zu bestätigen, folgende Stelle aus Herrn Hofr. Karsten's Lehrbegriff der gesammten Mathematik. 1 Th. S. 208, §. 8. her. „Der Begriff von demjenigen, was gerade sey, gehört zu den einfachen Begriffen, und läßt sich schwerlich durch irgend eine Erklärung deutlich machen. Aber dies weiß auch ein jeder von selbst, und man lernt von Jugend auf, so gut unterscheiden, was gerade, oder nicht gerade sey, wie man die Farben unterscheiden lernt, ohne daß man im Stande ist, zu sagen, wie z. B. roth oder grün aussieht. So viel kann man inzwischen von einer geraden Linie sagen, daß sie sich von ihrem Endpunkte in einerlei Richtung erstrecke, und man bemüht sich vergeblich, mehr Merkmale derselben durch Worte anzugeben; es sey denn, daß man

mit

mit vielen Worten immer einerlei sagen will." Dies Kennzeichen der geraden Linie ist auch unstreitig das natürlichste und leichteste. Wenn man von einem Punkte zu einen andern in einer geraden Linie gehen will, so richtet man seine Augen unverwandt nach diesem letzten Punkte hin, und sucht also ununterbrochen dieselbe Richtung zu behalten. Wenn man eine gerade Linie ziehen will, so bewegt man das Instrument, womit man solches thut, ununterbrochen nach einerlei Richtung fort, u. s. w.

Auf diese Art nun die geraden Linien gedacht, so folgt:

1. Daß durch zwei Punkte nicht mehr als eine gerade Linie gehet, und also zwei gerade Linien, die zwei Punkte mit einander gemein haben, zusammenfallen müssen, und einzig und allein in der Größe von einander verschieden seyn können.

2. Daß zwei gerade Linien, die durch zwei ihnen nicht gemeinschaftliche Punkte gehen, nie mehr als einen Punkt mit einander gemein haben können.

Aus der ersten Folgerung läßt sich ferner schliessen, daß die Theile einer jeden geraden Linie von der ganzen Linie bloß in der Größe verschieden, und also derselben ähnlich sind. Wollte man dies aber für eine Erklärung der geraden Linien annehmen, so fände die Anmerkung des Herrn Hofr. Kästners S. 170 Statt, und außerdem könnte es auch

auch scheinen, daß diese Erklärung nicht bloß auf die geraden Linien, sondern auch auf die Kreisbögen paßte.

Von der geraden Linie geht Euclides zur Fläche fort; die neueren Mathematiker aber reden vorher noch von der krummen Linie, und theilen die Erklärung derselben mit. Es entsteht daher die Frage: **Warum hat Euclides nicht auch die krumme Linie erklärt?** Die natürlichste Antwort darauf scheint mir zu seyn: Euclides schrieb Elemente, und hatte also bloß die Absicht, die einfachsten Gegenstände der Geometrie zu bearbeiten, und es betrachteten die Alten, wie aus der unten stehenden Stelle aus dem Proclus *) erhellt, die gerade Linie und die Kreislinie als diejenigen Linien, woraus alle übrigen zusammengesetzt wären. Wollte man sagen, daß die Kreislinie doch eine krumme Linie sey, und also die Erklärung der krummen Linie überhaupt auch billig vor der Betrachtung der Kreislinie hätte mitgenommen werden müssen: so ist es freilich wahr, daß man die

(*) Plato quidem Lineae duas simplicissimas praecipuasque ponens species, Rectam vtique et Circularem, reliquas omnes per mistionem ex his constituit, quaecunque Tortuosae dicuntur, quarum aliae quidem Planae sunt, aliae vero circa Solida subsistunt, et quaecunque per Solidorum Sectiones producuntur curuarum Linearum species. Libr, II, Comment. in Eucl. p. 60.

die Bestimmung, krumme Linie, häufig mit in die Erklärung der Kreislinie bringt. Selbst der Hr. Hofr. Karsten sagt im ersten Theil seines Lehrbegriffs S. 224 §. 36.: Eine Kreislinie ist eine krumme Linie, die eine Ebene so umschließt, daß alle Punkte in derselben von einem gewissen Punkte in dieser Ebene gleich weit entfernt sind. Allein lesen Sie dagegen des Hrn. Hofr. Kästners Erklärung des Kreises und seines Umfangs. S. 173 §. 13. so werden Sie diese Bestimmung darin nicht bemerkt finden; und dann überdenken Sie, was der Herr Prof. Kant in seiner Critik der reinen Vernunft S. 731 sagt: „Mathematische Definitionen können niemals irren. Denn weil der Begriff durch die Definition zuerst gegeben wird, so enthält er nur gerade das, was die Definition durch ihn gedacht haben will. Aber, obgleich dem Inhalte nach nichts Unrichtiges darin vorkommen kann, so kann doch bisweilen, obzwar nur selten, in der Form (der Einkleidung) gefehlt werden, nemlich in Ansehung der Präcision. So hat die gemeine Erklärung der Kreislinie, daß sie eine krumme Linie sey, davon alle Punkte von einem einigen (dem Mittelpunkte) gleich weit abstehen, den Fehler, daß die Bestimmung krumm unnöthiger Weise eingeflossen ist. Denn es muß einen besondern Lehrsatz geben, der aus der Definition gefolgert wird, und leicht bewiesen werden kann: daß eine jede Linie, deren alle Punkte von einem einigen gleich weit abstehen, krumm, (kein Theil von ihr gerade) sey.“ Euclides redet daher wegen der

Aus-

Auslassung der Erklärung der krummen Linie keinen Tadel, denn er braucht dieselbe nicht.

Wollen Sie Sich von der krummen Linie einen so vollkommnen und so deutlichen Begriff machen, als irgend davon durch eine Erklärung hervorgebracht werden kann, so dürfen Sie nur das, was der Hr. Hofr. Kästner S. 169 § 6 darüber sagt, mit Aufmerksamkeit und Nachdenken lesen. Insbesondere denken Sie die beiden Anmerkungen, wodurch die im § gegebene Erklärung aufs vortreflichste entwickelt wird, sorgfältig über, zumal da auf die darin bemerkten Umstände, so nothwendig sie auch sind, selten gleich im Anfange hingewiesen zu werden pflegt. Mit etwas veränderten Worten kann man auch sagen: Eine krumme Linie ist eine solche, von welcher kein Theil, so klein man ihn auch annehmen mag, gerade ist.

Bei der Erklärung der Fläche und der Ebene halte ich mich nicht auf. Die Euclideische Erklärung von der ersten ist sehr leicht; und was die Ebene betrifft, so können Sie, wenn Ihnen Euclid's Erklärung nicht gefällt, dafür die Kästnerische S. 171 § 7 nehmen. Was die krumme Fläche anlangt, so redet Euclides von ihr aus eben dem Grunde nicht, weswegen er die Erklärung der krummen Linie ausgelassen hat. Wollen Sie die Erklärung derselben lesen, so finden Sie in des Hrn. Hofr. Kästners Lehrbuche im angeführten § eine für jetzt für Sie hinlängliche. Die Anmerkung

bei diesem § können Sie überschlagen, denn was der Hofr. Kästner darin sagt, ist nicht den Anfängern geschrieben.

Hätte nun nicht etwa vor der Erklärung des ebenen Winkels die Erklärung des Winkels überhaupt vorhergehen sollen? Wenn man die hier zu erklärenden Gegenstände auf die im zweiten Briefe S. 10 f. beschriebene Art aufsucht, so kommt man (S. S. 13) von der Ebene unmittelbar zum ebenen Winkel; und diese Winkel sind es überdem allein, mit deren Betrachtung sich die Elementargeometrie beschäftiget. Dies ist der Grund, warum sogleich zum ebenen Winkel fortgegangen wird. Was ein ebener Winkel sey? Was man unter einem ebenen und geradlinigen Winkel zu verstehen habe? darüber sowohl als über die übrigen Erklärungen im Euclides habe ich nicht nöthig einzeln zu sprechen; also nur noch ein Paar allgemeine Anmerkungen.

Der Hr. Hofr. Kästner hat in seinem Lehrbuche S. 165 — 176 einige Erklärungen mehr als Sie im Euclides im ersten Buche finden. Dies rührt aus einem doppelten Grunde her. Einmal hat der Hr. Hofr. Kästner die gegebenen Erklärungen mit verschiedenen Entwickelungen begleitet, welches Euclides, da er Elemente schrieb, nach dem S. 4 Gesagten, nicht nöthig hatte; und daher konnte und mußte er auch der Schenkel und der Spitze eines Winkels, der zusammengehenden

und aus einander fahrenden Linien, der Nebenwinkel u. d. gl. gedenken. Zum andern hat der Hr. Hofr. Kästner an dem gedachten Orte zugleich verschiedene Erklärungen mitgenommen, die Euclides erst in dem folgenden dritten und vierten Buche gebraucht, wohin der Ausschnitt, der ähnliche Abschnitt, die Tangente, das ordentliche Vieleck, die ähnliche Figur, die in einen Kreis beschriebene Figur, und der um eine Figur beschriebene Kreis gehört. Am Schlusse dieses, oder im Anfange meines nächsten Briefes werde ich dieses letzten Punkts noch einmal gedenken.

Die Erklärung des Hrn. Hofr. Kästners vom Kreise unterscheidet sich von der Eucleideischen dadurch, daß, so wie diese die Merkmale des Kreises angiebt, wodurch er sich von den übrigen Figuren unterscheidet, jene die Art und Weise beschreibt, wie ein Kreis entsteht. Die Kästnersche Erklärung ist daher eine genetische Erklärung, denn so pflegt man die Erklärungen zu nennen, welche die Entstehungsart einer Sache angeben, die Euclideische hingegen ist eine Sacherklärung. Beide sind gut und brauchbar, und aus beiden fließt auch sehr leicht, was Sie im Kästnerschen Lehrbuche § 13 besonders bemerkt finden, daß die Halbmesser Eines Kreises alle einander gleich sind, und so auch die Durchmesser.

Euclides gedenkt des Halbmessers nicht besonders, weil er dabei bloß die Benennung zu erklä-

ren gehabt hätte, und er dieses der Entwickelung überläßt. Eben das ist der Grund, warum er vorher bei den Winkeln die Schenkel und die Spitze nicht erklärt, und auch nachher bey den geradlinigen Figuren nicht anführt, daß man die Linien, welche dieselben einschließen, Seiten nennt.

Die 17te 18te und 19te Erklärung des Euclides fanden wir bei der im zweiten Briefe S. 11 f. angestellten Aufsuchung der im Anfange der Geometrie zu erklärenden Gegenstände nicht. Die 17te und 18te halten sich aber nicht ganz in den Grenzen der mathematischen Erklärungen, sondern setzen schon einen, wenn gleich leichten, Satz voraus; und die 19ten braucht Euclides erst im dritten Buche, wo er sie auch noch einmal mittheilt. Es gehören also diese Erklärungen eigentlich nicht hierher, und es kann als ein Kennzeichen der Güte unserer obigen Entwickelung und Aufsuchung der ersten Gegenstände der Geometrie betrachtet werden, daß sie uns auf diese Bemerkung führt.

Und nun zum Schlusse noch ein Paar Worte von den Grenzen, innerhalb welcher sich Euclides im ersten Buche seiner Elemente hält. Die Betrachtung der geradlinigen Figuren überhaupt ist das, was sich Euclides darin vorgesetzt hat, und weil dazu eine ausführliche Betrachtung der Dreiecke und der Vierecke erfordert wird, so macht natürlicher Weise diese den Anfang. Daß aber dieser Materie sehr gut ein besonderer Abschnitt gewidmet wer-

den könne, wenn gleich die Neuern selbige nicht so wie Euclides absondern, darüber werde ich mich mit Ihnen im Anfange meines nächsten Briefes unterreden.

Achter Brief.

Fernere Fortsetzung der Anmerkungen zu den Erklärungen, Forderungen und Grundsätzen des ersten Buchs der Euclideischen Elemente.

Um Sie in den Stand zu setzen, über die Abtheilungen, die man bald auf diese, bald auf jene Weise in der Geometrie macht, zu urtheilen, muß ich, ehe ich in der Mittheilung der in der Ueberschrift dieses Briefes gedachten Anmerkungen fortfahre, das etwas erweitern, was ich im zweiten Briefe S. 7 und f. über die Geometrie im Allgemeinen gesagt habe.

Nach S. 10 ist die Geometrie nichts anders als eine Wissenschaft vom Raume oder von der Ausdehung; und die Untersuchung, wie die Gestalt und Größe begrenzter Räume oder Ausdehnungen von der Beschaffenheit, der Größe und der Lage der Grenzen, zwischen welchen diese Räume eingeschlossen sind, abhangen, ist das eigentliche Geschäfte der Geometrie. Die Geometrie ist also eine sehr weitläuftige Wissenschaft; denn wie viel und wie mancherlei Arten begränzter Räume lassen sich nicht

denken? und es ist daher auch zweckmäßig, die Geometrie in mehrere, größere und kleinere, Theile und Abschnitte zu theilen. Wie soll das nun geschehen? Einmal nach der Verschiedenheit der begrenzten Räume, und zweitens nach den mancherlei Absichten, welche man bey der Betrachtung dieser Räume haben kann, denn diese Absichten sind allerdings nicht immer ebendieselben. Nun *bieten sich*, wenn man auf dem S. 11 f. seinem Anfange nach beschriebenen Wege fortfährt, die einzelnen Gegenstände der Geometrie aufzusuchen, zuerst die Räume dar, welche in gerade Linien und *in* Kreislinien, ferner die, welche in Ebenen und in solche krumme Flächen, die sich aus dem Kreise erklären lassen, eingeschlossen sind. Man sondert also diese doppelte Gattung begrenzter Räume von allen übrigen, die sich sonst noch denken lassen, ab, und nennt die Geometrie, wenn sie sich damit beschäftiget, gemeine, oder Euclideische, oder Elementar-Geometrie. Da wir es fürs erste *bloß mit* dieser Geometrie zu thun haben werden, so will ich auch hier bei ihr allein stehen bleiben. Die Räume, welche sie untersucht, sind entweder Ebenen, oder Körper. Die Elementar-Geometrie theilt sich also nach dieser Verschiedenheit ihres Gegenstandes in die ebene Geometrie, und in die Stereometrie, oder die Lehre von den geometrischen Körpern. Um auch von der Stereometrie jetzt nicht zu reden, sondern bloß bei dem zu verweilen, was wir zu unserer gegenwärtigen Absicht brauchen, so kann man in der ebenen Geometrie entweder die Absicht haben, zu bestim-

men,

men, unter was für Umständen Figuren einander gleich oder ungleich sind; oder es kann die Frage seyn, wenn zwei oder mehrere Figuren einander ähnlich sind? Wir erhalten also auch für die ebene Geometrie zwei Abschnitte; und soll nun der erstere noch weiter abgetheilt werden, so kann solches nicht anders als nach der Verschiedenheit der Figuren geschehen, deren Gleichheit darin untersucht wird. Hier kann man nun die geradlinigen Dreiecke, Vierecke und Vielecke, überhaupt genommen, zu einer; die Rechtecke, unter einander ausführlich verglichen, zu einer andern; den Kreis an sich betrachtet, zu einer dritten; und den Kreis, in Verbindung mit den ordentlichen Vielecken untersucht, zu einer vierten Classe rechnen, und erhält auf diese Art vier Unterabtheilungen.

Betrachten Sie nun die Elemente des Euclides so werden sie bald finden, daß die gedachten Abtheilungen darin zum Grunde liegen. Von den übrigen Büchern ein ander Mal zu reden, und jetzt nur bey den vier ersten stehen zu bleiben; so werden in dem ersten die geradlinigen Dreiecke, Vierecke und Vielecke, überhaupt genommen, untersucht, im zweiten die Rechtecke, ausführlich unter einander verglichen, im dritten der Kreis an sich, und im vierten der Kreis, in Verbindung mit den ordentlichen Figuren, betrachtet. Ohnstreitig trägt auch diese Abtheilung zur leichten Uebersicht dessen, was von allen diesen Gegenständen zu behaupten ist, viel bei, und ich habe daher nicht nöthig, den Euclides wei-

ter zu rechtfertigen, sondern nur von den Abweichungen zu reden, welche man bei den Neuern in diesem Stücke findet.

Der Grund von diesen Abweichungen ist vorzüglich darin zu suchen, daß man manche von den Untersuchungen, welche Euclides in den ersten vier Büchern seiner Elemente hat, nicht mehr so wie er anzustellen pflegt. Euclides hat nemlich in den gedachten Büchern, so wie auch in den beiden folgenden die Geometrie ganz rein, und ohne alle Vermischung mit der Arithmetik, vorgetragen, dagegen die Neuern die Lehrsätze der Arithmetik früher auf die Geometrie anwenden, um auf diese Art leichter und schneller zum Ziele zu gelangen. Dadurch erhalten die meisten Lehrsätze des zweiten Buchs der Euclideischen Elemente, so wie auch alle die im dritten und vierten Buche, welche sich auf jene beziehen, einen ganz andern Ort, und die übrigen können füglich übergangen werden, weil man das, wozu Euclides sie nöthig hatte, auf andern Wegen erreicht. Wenn nun außerdem auch noch die Anzahl der Sätze dadurch vermindert wird, daß viele von denen, welche Euclides besonders betrachtet hat, mit andern als Zusätze verbunden werden: so läßt sich allerdings die ganze ebene Geometrie, denn von dieser brauche ich hier nur zu reden, ohne alle weitere Abtheilung so vortragen, daß die Uebersicht des Ganzen gleichwohl noch leicht bleibt; und das ist der Fall in des Hrn. Hofr. Kästners Lehrbuche. Hiezu kommt, daß dieses Lehrbuch nicht für erste Anfinger

fänger geschrieben ist, und darin also schon ein und das andere Erleichterungsmittel aus der Acht gelassen werden konnte.

Für erste Anfänger halte ich es sehr nützlich, daß sie sich mit Euclid's Abtheilungen bekannt machen: sie erhalten dadurch gleichsam mehrere Ruhepunkte auf ihrem Wege, und überdem ist seine Ordnung so natürlich, daß sie sich dem Nachdenkenden von selbst darbietet. Wenn sie dabei manche Untersuchungen auf eine weitläuftigere Art anstellen müssen, als sie es in der Folge nöthig haben, so scheint dies allerdings eine Unbequemlichkeit zu seyn; aber wer diese Mühe nicht scheut, wird sich gleich wohl hinterher reichlich belohnt finden, weil er dadurch zu den künftigen Anwendungen der Arithmetik auf die Geometrie vorbereitet wird, und es überdem sehr angenehm und nützlich ist, einerlei Wahrheit auf mehr als einem Wege gefunden zu haben.

Sehr häufig findet man auch die ebene Geometrie, und insbesondere den Theil derselben, der die Gleichheit und Ungleichheit der Figuren zum Gegenstande hat, zwar in mehrere kleinere Abschnitte getheilt, aber nach ganz andern Regeln, als die, welche Euclides befolgt hat. Ich kann nicht sagen, daß mir irgend eine dieser Abtheilungen gefiele, insbesondere aber muß ich das misbilligen, wenn dabei die Erklärungen nicht von den Sätzen abgesondert, sondern unter dieselben gemischt werden.

Dadurch wird die Uebersicht des Ganzen außerordentlich erschwert, und noch weniger kann dabei der Lernende sehen, wie man nach und nach die Lehren der Geometrie hat erfinden können.

Sie werden nun den Grund einsehen, warum der Hr. Hofr. Kästner schon im Anfange manche Erklärungen hat, die Sie beim Euclides, erst später finden. Und da dies der Grund war, weswegen ich das Bisherige hier eingeschaltet habe: so verweile ich dabei nun auch nicht länger, sondern verspare das, was sich dazu hinzusetzen läßt, bis an einen bequemern Ort. Also zur genauern Betrachtung der Forderungen und Grundsätze, deren mehrere allerdings einige Anmerkungen bedürfen.

Wie man die Forderungen überhaupt anzusehen und zu gebrauchen habe, darüber habe ich mich bereits im dritten Briefe S. 20 f. erklärt. Lassen Sie uns nun dieselben einzeln betrachten.

Um zuvörderst die Wichtigkeit der Forderungen, so betrachtet und gebraucht, als es S. 20. 21. gelehrt worden ist, an einigen Beispielen zu zeigen, so verwandelt man durch die Befolgung der ersten Forderung die Vierecke und Vielecke in lauter Dreiecke, und sobald das geschehen ist, ist man auch im Stande, vermittelst dessen, was man von den Dreiecken gelernt hat, die Vierecke und Vielecke zu untersuchen. Durch die Anwendung der zweiten Forderung bei dem Dreiecke erhält man einen äußern

Win=

Winkel, und wird also dadurch zur Vergleichung des äußern Winkels eines Dreiecks, dessen eine Seite verlängert worden, mit den innern, insbesondere mit den innern gegenüberstehenden geleitet. Wie die Anwendung der dritten Forderung, wenn eine gerade Linie gegeben ist, zur Findung geometrischer Wahrheiten führe, ist bereits im dritten Briefe S. 23 f. gezeigt worden.

Eine Hauptregel bei der Anwendung der Forderungen, die sich auch aus der Absicht der Forderuugen sehr leicht ergiebt, ist, daß man die Forderungen so oft und so lange anwende, bis die jedesmaligen Gegenstände zur Untersuchung genugsam vorbereitet sind, aber auch nicht mehrmal, als dazu erfordert wird. Bei einem Fünfecke z. B. muß man die erste Forderung zweimal befolgen, nicht mehr und nicht weniger; im ersten Falle würde man den beabsichteten Vortheil nicht erhalten, und im andern sich die Erreichung desselben erschweren.

Bei der gedachten Anwendung der dritten Forderung endlich fällt nach einiger Ueberlegung bald in die Augen, daß jede zwei aus den Endpunkten einer gegebenen geraden Linie AB Fig. 1 mit dieser Linie beschriebenen Kreise sich zweimal schneiden müssen. Denn die Peripherie des aus B beschriebenen Kreises geht durch A, einen Punkt innerhalb, uud durch C in den verlängerten AB, einen Punkt außerhalb des um A beschriebenen Kreises; und da der Umfang eines Kreises eine zusammenhängende

zende Linie ist, so kann der Umfang des aus B beschriebenen Kreises weder von A aus nach C noch von C aus nach A sich erstrecken, ohne den um A beschriebenen Kreis zu schneiden.

Eben so bietet sich der siebente Grundsatz des Hrn. Hofr. Kästners S. 178. § 7. so wie auch die S. 179 oben, angeführte Behauptung bei dieser Gelegenheit dar.

Ich komme zu den Grundsätzen. Ich betrachte sie, nach dem im zweiten Briefe S. 21 f. Gesagten als allgemeine Regeln der Wahrnehmung bei der Untersuchung geometrischer Gegenstände. Sie dienen also nicht bloß dazu, um den zu führenden Beweisen zur Grundlage zu dienen, sondern sie sollen eben so sehr uns zur Entdeckung der Eigenschaften der geometrischen Gegenstände leiten. So führt uns z. B. der erste Grundsatz bei der ersten Figur sogleich darauf, daß das daselbst beschriebene Dreieck ein gleichseitiges Dreieck sey; so ziehen wir ferner bei der zweiten Figur aus der Gleichheit der Linien AB, AC, und BF, CG, nach dem zweiten sogleich die Folge, daß AF gleich AG sey; und wenn die Gleichheit der Linien AB, AC, AF, AG gegeben worden wäre, so würde der dritte Grundsatz uns sogleich daran erinnern, daß BF gleich CG sey. Was die übrigen Grundsätze betrifft, so verdienen die Erläuterungen derselben, die Sie in des Hrn. Hofr. Kästners Lehrbuche S. 176 f. finden, aufmerksam durchdacht und

gemerkt

gemerkt zu werden. Ueber den 11ten Grundsatz des Euclides finden Sie indeß am angeführten Orte noch nichts, sondern dessen Erläuterung kommt erst in der Folge. Auch ich will das, was ich darüber zu sagen habe, bis dahin verschieben, wo des Hrn. Hofr. Kästners Lehrbuch davon zu reden Gelegenheit geben wird; und dies geht um so viel eher an, da wir fürs erste diesen Grundsatz nicht gebrauchen.

Und nun muß ich auch, um nichts unberührt zu lassen, einiger Bezeichnungen und Abkürzungen gedenken. Wie man gerade Linien, geradlinige Winkel und Figuren mit Buchstaben bezeichne, und sie darnach benenne, ist Ihnen bekannt. Gerade Linien bezeichnet und benennt man durch und nach Buchstaben, die an ihre Endpunkte gesetzt werden; geradlinige Winkel durch und nach den an den Endpunkten ihrer Schenkel stehenden Buchstaben, wobei man den an der Spitze in die Mitte setzt, bisweilen aber braucht man auch diesen letzten Buchstaben allein, oder einen zwischen die Schenkel geschriebenen kleinern Buchstaben; geradlinige Figuren endlich bezeichnet man so, daß man an ihre Ecken Buchstaben setzt, und sie nun entweder nach allen, oder nach zwei gegenüberstehenden benennt. Sonst ist das Zeichen der Gleichheit $=$, das Zeichen der Ungleichheit $>$ oder $<$, das Zeichen $+$ als Zeichen der Addition, das Zeichen $-$, als Zeichen der Subtraction, das Zeichen $\triangle$, welches man vor die drei Buchstaben eines Dreiecks setzt, um solches

von

von dem Winkel zu unterscheiden, und q zu merken, wenn es zu den beiden eine gerade Linie bezeichnenden Buchstaben gesetzt wird, um das Quadrat dieser Linie anzudeuten. Ein Paar Beispiele von dem Gebrauche dieser Abkürzungszeichen anzuführen, so heißt

$A = B$, A ist gleich B
$A > B$, A ist größer als B
$A < B$, A ist kleiner als B.
ABq, das Quadrat von AB

Und hieraus wird folgendes deutlich seyn. Wenn

$A = B$, und
$B = C$ ist: so ist auch
$C = A$. Ferner wenn
$A = B$ und
$C = D$ ist, so ist auch
$A + C = B + D$, und
$A - C = B - D$. Desgleichen, wenn
$A > B$
$C = D$ ist, so ist auch
$A + C > B + D$, und
$A - C > B - D$. Endlich wenn
$A < B$
$C = D$ ist, so ist auch
$A + C < B + D$, und
$A - C < B - D$.

Neun-

Neunter Brief.

Anmerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen des ersten Buchs der Elemente des Euclides.

Ich habe nicht nöthig, Ihnen jede der nun folgenden Aufgaben und Lehrsätze besonders zu erklären, denn theils ist das, was sie darüber im Euclides finden, schon an und für sich so deutlich, daß es keiner besondern Anmerkungen bedarf, theils haben Sie die gedachten Aufgaben und Lehrsätze schon durch meine Versuche in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie kennen gelernt. Alles also, was ich Ihnen über die Sätze des ersten Buchs der Euclideischen Elemente sagen werde, wird darin bestehen, daß ich

1. Ihnen an ein Paar Beispielen die Abkürzungen bekannt mache, welche sich Herr Lorentz, Hr. Bärmann und andere bei der Uebersetzung der Elemente des Euclides erlaubt haben, und welche, so gut sie, von einer Seite betrachtet, sind, doch auch eine andere nicht so vortheilhafte Seite haben.

2. Werde ich insbesondere bei den Sätzen verweilen, welche die Neuern, anders als Euclides behandeln, und die erforderlichen Vergleichungen anstellen. Dies wird mir unter andern Gelegenheit geben, die Anmerkungen beizubringen, welche sie zum Verständniß des Kästnerischen Lehrbuchs nöthig haben.

3. Will ich Ihnen einige Anleitung zu geben suchen, die allgemeinen Sätze des Euclides auf besondere Fälle anzuwenden, und dabei die Elementar-Kenntnisse zu erweitern.

4. Den Beschluß sollen einige Anmerkungen über die Folge machen, welche wir unter den Sätzen des ersten Buchs der Euclideischen Elemente finden.

Um Sie also zuvörderst mit den Abkürzungen bekannt zu machen, welche sich Hr. Lorenz, Hr. Barmann und andere bei der Uebersetzung der Euclideischen Elemente erlaubt haben, so will ich ein Paar Lehrsätze und ein Paar Aufgaben so vollständig hersetzen, als sie Euclides selbst ausgearbeitet hat. Ich wähle dazu den 4ten, 5ten und 6ten Satz, oder den ersten, zweiten und dritten Lehrsatz, und die beiden Aufgaben, welche den 9ten und 10ten Satz ausmachen. Ohne alle Abkürzungen müßte die Uebersetzung dieser Sätze folgender Gestalt lauten.

Vierter Satz. Lehrsatz.

Wenn in zweien Dreiecken zwei Seiten, einzeln genommen, und die Winkel, welche darin von diesen Seiten eingeschlossen werden, einander gleich sind: so sind auch die Grundlinien dieser Dreiecke, und die ganzen Dreiecke, so wie auch die übrigen Winkel, die gleichen Seiten

Seiten gegenüber stehen, einzeln genommen, einander gleich.

Man nehme an, daß in den beiden Dreiecken ABC und DEF, Fig. 4, die Seiten AB und AC des einen, den Seiten DE und DF des andern Dreiecks gleich seyn, d. h. man setze AB gleich DE und AC gleich DF; auch sey der von den Seiten AB und AC eingeschlossene Winkel A dem von den Seiten DE und DF eingeschlossenen Winkel D gleich. Unter diesen Voraussetzungen wird behauptet, daß auch die Grundlinien BC und EF, ferner die ganzen Dreiecke ABC und DEF, desgleichen die Winkel B und C den Winkeln E und F, d. h. die beiden Winkel B und E, die den gleichen Seiten AC und DF, und die beiden Winkel C und F, die den gleichen Seiten AB und DE gegenüber stehen, einander gleich seyn.

Denn da die geraden Linien AB und DE einander gleich angenommen sind, so müssen sie, wenn man sie so auf einander legt, daß der Punkt A auf den Punkt D zu liegen kommt, einander decken, und der Punkt B muß auf den Punkt C fallen. Denn fiele bei der gedachten Aufeinanderlegung der geraden Linien AB und DE der Punkt B nicht auf den Punkt C, so müßte er entweder in die DE, und hier wieder entweder zwischen D und E, oder über E hinaus in die Verlängerung von DE oder er müßte außerhalb der Linie DE fallen. Im ersten Falle aber wäre wider Gr. 9 das Ganze nicht größer

 als

als sein Theil, und im zweiten hätten zwei gerade Linien mehr als einen Punkt mit einander gemein, ohne gleichwohl zusammen zu fallen, und dies streitet wider den Begriff einer geraden Linie. Es decken sich also die geraden Linien AB und DE. Da nun ferner der Winkel A dem Winkel D gleich ist, so decken auch diese beiden Winkel einander; und weil AC gleich ist DF, so deckt auch die AC die DF, und C kommt auf F zu liegen. Folglich decken sich nun auch die Grundlinien BC und EF, weil, wenn BC über oder unter EF fallen sollte, die beiden geraden Linien BC und EF, wider Grundsatz 12, einen Raum einschließen würden, und sind daher einander gleich. Auch ist nun das ganze Dreieck ABC dem Dreiecke DEF, der Winkel B dem Winkel E, und der Winkel C dem Winkel F gleich, und zwar aus eben dem Grunde, weil sie sich decken. Wenn also in zweien Dreiecken zwei Seiten, einzeln genommen, und die Winkel, welche darin von diesen Seiten eingeschlossen werden, einander gleich sind: so sind auch die Grundlinien dieser Dreiecke, und die ganzen Dreiecke, so wie auch die übrigen Winkel, die gleichen Seiten gegenüber stehen, einander gleich.

Fünfter Satz. Lehrsatz.

In einem jeden gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel über der Grundlinie, und wenn man

man die Schenkel verlängert, auch die Winkel unter der Grundlinie einander gleich.

Man nehme an, daß das Dreieck ABC Fig. 5. ein gleichschenkliges Dreieck, und darin AB gleich AC sey. Unter dieser Voraussetzung wird behauptet, daß die Winkel ABC und ACB über der Grundlinie BC, desgleichen, wenn man die Schenkel AB und AC nach Gefallen z. B. bis nach D und E verlängert, auch die Winkel DBC und ECB unter der Grundlinie BC einander gleich seyn.

Man schneide von der unbegrenzten geraden Linie AE ein Stück AF ab, welches der Linie AD gleich sey, und ziehe die geraden Linien BF und DC.

Nun betrachte man die beiden Dreiecke ABF und ACD. Da in denselben die Seiten AB und AF den Seiten AC und AD, nehmlich AB der AC, und AF der AD, gleich sind, das erste nach der geschehenen Annahme, und das andere nach der Construction; und der Winkel A, der von AB und AF eingeschlossen ist, dem Winkel A zwischen AC und AD gleich, oder der Winkel A beiden Dreiecken gemein ist: so ist auch die Grundlinie BF der Grundlinie DC, so wie auch der Winkel F den Winkel D, und der Winkel ABF dem Winkel ACD gleich, weil jene sowohl als diese in den gedachten Dreiecken gleichen Seiten gegenüber stehen.

Ferner betrachte man die beiden Dreiecke BDC und CFB. Da die Seiten AD und AF ihrer Construction wegen gleich sind, so ergiebt sich, wenn man von ihnen die gleichen geraden Linien AB und AC wegnimmt, nach dem 3ten Grundsatze, daß BD gleich CF sey. Es sind daher in den beiden Dreiecken BDC und CFB die Seiten BD und DC den Seiten CF und FB nemlich BD der CF, und DC der FB gleich, indem die Gleichheit dieser beiden Seiten vorhin bewiesen worden ist; auch sind die von diesen gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel, D und F, wie ebenfalls bereits gezeigt worden ist, einander gleich. Und hieraus fließet, daß die Winkel DBC und FCB, desgleichen die Winkel BCD und CBF einander gleich sind, weil jene so wohl als diese in den jetzt betrachteten Dreiecken gleichen Seiten gegenüber stehen.

Da nun vorher gezeigt worden ist, daß die Winkel ABF und ACD, und jetzt, daß die Winkel CBF und BCD gleich sind: so ergiebt sich hieraus nach dem 3ten Grundsatze, daß auch der Winkel ABC gleich sei dem Winkel ACB; und dies sind die Winkel über der Grundlinie BC in dem Dreiecke ABC. Nun ist aber auch gezeigt worden, daß der Winkel BCD dem Winkel CBF gleich ist; und da dies die Winkel unter der Grundlinie BC in dem gleichschenkligen Dreiecke ABC sind, dessen Schenkel AB und AC verlängert worden: so sind folglich in einem jeden gleichschenkligen Dreiecke die Winkel über der Grundlinie, und wenn man die Schen-

Schenkel verlängert, auch die Winkel unter der Grundlinie einander gleich.

Sechster Satz. Lehrsatz.

Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel gleich sind, so sind darin auch die diesen Winkeln gegenüber stehenden Seiten gleich.

Man nehme an, daß in dem Dreiecke ABC, Fig. 6, der Winkel ABC dem Winkel ACB gleich sey. Ist dies, so sind auch die Seiten AC, AB, die diesen Winkeln gegenüber stehen, einander gleich.

Denn wollte jemand dies läugnen, so würde er behaupten müssen, daß die beiden Winkel ABC und ACB einander gleich, und dabei von den beiden ihnen gegenüberstehenden Seiten AB und AC die eine größer als die andere seyn könne. Man lasse also, wenn dies möglich ist, AB größer als AC seyn, und schneide in D von AB ein der Seite AC gleiches Stück BD ab, und ziehe die Linie DC. Nun betrachte man die beiden Dreiecke ABC und DBC. Da die beiden Seiten AC und BC des Dreiecks ABC den Seiten DB und BC des Dreiecks DBC gleich sind, nemlich AC gleich DB, und BC sich selbst, und überdem die von diesen gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel ACB und DBC nach der Voraussetzung als gleich angesehen werden müssen:

so folgt, daß auch die ganzen Dreiecke ABC und DCB einander gleich seyn werden. Auf diese Art wäre also ein Theil dem Ganzen gleich, welches unmöglich ist; und es können daher auch die Seiten AB und AC, wenn die Winkel ABC und ACB, denen sie gegenüber stehen, gleich seyn sollen, nicht ungleich seyn, weil man sonst zugeben müßte, daß ein Theil so groß seyn könne, als das Ganze. Wenn also in einem Dreiecke zwei Winkel gleich sind: so sind auch darin die diesen Winkeln gegenüber stehenden Seiten gleich.

Neunter Satz. Aufgabe.

Einen gegebenen geradlinigen Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen.

Es sey der geradlinige Winkel BAC Fig. 7. in zwei gleiche Theile zu theilen.

Man nehme in dem einen Schenkel AB einen Punkt D an, schneide von dem andern Schenkel BC ein Stück AE ab, welches der AD gleich sey, und ziehe DE. Hierauf beschreibe man über der Linie DE ein gleichseitiges Dreieck DFE, und ziehe die Linie AF, welche den Winkel BAC in die beiden Winkel BAF und CAF theilt.

Die beiden Winkel BAF und CAF sind einander gleich. Denn da die Seiten DA und AF des

Drei-

Dreiecks DAF den Seiten EA und AF des Dreiecks AEF, DA nemlich der AE, nach der Construction, und AF sich selbst, überdem auch die dritten Seiten beider Dreiecke DF und FE einander gleich sind, weil DEF ein gleichseitiges Dreieck ist: so ist auch der Winkel DAF gleich dem Winkel EAF und der Winkel BAC also in zwei gleiche Theile getheilt.

Zehnter Satz. Aufgabe

Eine gegebene gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Es sei die gerade Linie AB Fig. 8 in zwei gleiche Theile zu theilen.

Man beschreibe über AB das gleichseitige Dreieck ABC, theile den Winkel desselben C durch die gerade Linie CD in zwei gleiche Theile, und lasse von der CD die AB in D schneiden.

Auf diese Art wird die Linie AB in D in zwei gleiche Theile getheilt. Denn da die beiden Seiten AC, CD des Dreiecks ACD den beiden Seiten BC, CD des Dreiecks BCD, AC nemlich der BC als Seiten eines gleichseitigen Dreiecks, und CD sich selbst, und überdem die Winkel ACD und DCB wegen der Construction einander gleich sind, so muß auch AD gleich seyn DB, und es ist also die Linie AB in D in zwei gleiche Theile getheilt.

Vergleichen Sie diese Uebersetzung mit der Uebersetzung eben derselben Sätze vom Hrn. Lorenz: so werden Sie bei der letztern eine viel größere Kürze bemerken.

Beim Euclides wird, um zuvörderst von den Lehrsätzen zu reden, immer

1. der Lehrsatz selbst mit bloßen Worten ausgedruckt; dann

2. eine Erläuterung desselben an einer Figur, und dieser, wenn es nöthig ist, und z. B. bei dem fünften Satze,

3. eine Vorbereitung zum Beweise hinzugefügt. Nun kommt

4. der Beweis des Lehrsatzes selbst, und zwar an der Figur; und den Beschluß macht

5. eine Wiederhohlung des Lehrsatzes, mit bloßen Worten ausgedruckt.

Was die Aufgaben betrift, so pflegt Euclides dieselben auch jedesmal

1. mit bloßen Worten auszudrucken

2. durch eine Figur zu erläutern

3. an dieser Figur die Auflösung zu zeigen

4. die Richtigkeit der gegebenen Auflösung ebenfalls an dieser Figur darzuthun, und

5. mit der Behauptung zu schließen, daß der Aufgabe in Genüge geschehen sey. Dabei gebraucht Euclides keine Zeichen, sondern beschreibt alles mit Worten.

Die größere Kürze bei Hrn. Lorenz und andern neuern Uebersetzern des Euclides rührt aus folgenden Gründen her. Einmal werden von ihnen die beiden ersten Stücke bei den Lehrsätzen sowohl als den Aufgaben zusammen gezogen. Zum andern wird die Wiederholung, womit Euclides den Beschluß zu machen pflegt, ausgelassen. Und drittens bedienen sich die neuen Uebersetzer sehr häufig gewisser Zeichen, insbesondere des Zeichens der Gleichheit.

Das ist nun ohnstreitig ausgemacht, daß die Abkürzung, welche durch den Gebrauch der Zeichen entsteht, für denjenigen, der sich diesen Gebrauch geläufig gemacht hat, eine sehr große Bequemlichkeit sey, und die Uebersicht des Ganzen ungemein erleichtere. Wenn man vollends dabei nicht immer in eines fort schreibt, sondern die verschiedenen Sätze unter einander setzt, so ist es außerordentlich leicht, auch weitläuftige Beweise mit einem Blicke zu übersehen. Nehmen Sie z. B. den Beweis des fünften Satzes, der hierdurch folgende Gestalt erhält. Es ist Fig. 5. wenn daselbst

AB = AC, und
AF = AD ist

1. △ ABF = △ ACD, indem
AB = AC, weil △ ABC gleichschenklig,
AF = AD, wegen der Construction, und
A = A ist. Folglich ist auch
BF = CD
F = D und
AB = ACD. Nun ist aber ferner

2. △ BCD = △ BCF, indem
BD = CF, weil AD — AB = AF — AC,
DC = FB }
D = F } wegen des Vorhergehenden.
Folglich ist
BCD = CBF, und
DBC = BCF; und dies sind die Winkel unter der Grundlinie. Und da
ABF = ACD nach dem Vorhergehenden
CBF = BCD nach dem Jetzigen, so ist auch, Gr. 3.
ABF — CBF = ACD — BCD oder
ABC = ACB, und dies sind die Winkel über der Grundlinie.

Was nun aber die Zusammenziehung des bloß wörtlichen Ausdrucks der Lehrsätze oder der Aufgaben mit ihren Erläuterungen an einer Figur, und die Auslassung der Wiederholung, womit Euclides seine Beweise zu beschließen pflegt, betrifft: so gefällt mir Euclids Methode für Anfänger sehr. Denn durch das Erste werden sie angehalten, sich die

Auf=

Aufgaben und Lehrsätze auch ohne Figur zu gedenken, wenigstens sich dabei keine Figur ganz bestimmt vorzustellen; und durch das Letzte werden sie gewöhnt, die bewiesenen Lehrsätze und aufgelößten Aufgaben sich am Ende nochmals gleichsam im Ganzen gegenwärtig zu machen.

So viel für dieses Mal. In meinem nächsten Briefe werde ich Ihnen einige Anmerkungen mittheilen, die insbesondere den Gang, welchen man bei den Beweisen zu nehmen hat, betreffen sollen.

Zehnter Brief.

Fortsetzung der Anmerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen des ersten Buchs der Eucli- deischen Elemente.

Ich mache den Anfang dieses Briefes mit ein Paar Anmerkungen, zu welchen mich die im letzten Briefe betrachteten Sätze veranlassen.

Ich habe im vierten Briefe S. 34. 35 gesagt. „Die Aufgaben und Lehrsätze sind die Resultate der über die durch die Erklärungen festgesetzten Gegenstände nach den Forderungen und Grundsätzen angestellten Untersuchung des Geometers. Was man aus sich selbst nehmen kann, muß man nicht von andern entlehnen, und was man allein zu finden im Stande ist, sich nicht von andern weisen lassen.

Auch

Auch die Aufgaben und Lehrsätze lassen sich nach allgemeinen Regeln finden; aber wenn dies zu schwer ist, so muß man wenigstens, so oft man an eine Aufgabe kommt, ihre Auflösung, und wenn ein Lehrsatz folgt, seinen Beweis selbst zu finden suchen". Dann setzte ich hinzu: „Ueber die Art und Weise, wie man sich dabei zu nehmen, und dieses Geschäfte zu erleichtern hat, will ich Sie an einem andern Orte unterrichten". Zum Beweise, daß ich, wenn ich Sie bisweilen auf das Folgende verweisen muß, die Hoffnung, die ich Ihnen dann mache, sobald es irgend möglich ist, zu erfüllen suche, will ich jetzt vor allen andern dem am angeführten Orte Ihnen gethanen Versprechen ein Genüge thun.

Der achte Grundsatz des **Euclides**: Dinge, die einander decken, sind einander gleich; giebt ausführlich entwickelt auch den vom Hrn. Hofr. **Kästner** S. 177 4. angeführten: Gerade Linien und Winkel, die gleich sind, decken einander. Dieser Grundsatz nach dem Br. 3. S. 21 angegebenen Gesichtspunkte betrachtet, so ist er mit der Regel gleichbedeutend: So oft man von zwei geraden Linien oder zwei geradlinigen Winkeln weiß, daß sie einander gleich sind, muß man sie in Gedanken so auf einander legen, daß sie sich decken. Das geschicht nun bei zwei gleichen geraden Linien, wenn man den einen Endpunkt und den einen Theil der einen Linie, auf den einen Endpunkt und den einen Theil der andern Linie legt, wo also alsdenn die beiden andern Endpunkte ebenfalls und von selbst zusammen fallen; bei gradlinigen Winkeln aber, wenn man die Spitze

und

und den einen Schenkel des einen Winkels auf die Spitze und den einen Schenkel des andern Winkels und übrigens beide Winkel auf einander legt. Ist dies geschehen, so fallen auch die übrigen Schenkel zusammen. Haben sie dies vor Augen, und handeln Sie darnach z. B. bei dem vierten Satze, so, daß sie ein Datum nach dem andern nehmen, und dabei alles was sich auf diese Art ergiebt, aufmerksam und zugleich nach den übrigen Grundsätzen betrachten: so finden Sie den ganzen Beweis desselben in der besten Ordnung und mit sehr geringer Mühe.

Ferner habe ich Br. 4. S. 28. 29 gesagt. Daß der Geometer alle Entdeckungen, die er macht, sogleich als neue Erleichterungsmittel seiner Untersuchungen brauchen, und so zu sagen mit jeder erworbenen Kenntniß, sobald sich Gelegenheit dazu zeigt, wuchern müsse. Ist bei dem fünften Satze, außer dem Satze selbst, auch seine Erläuterung an einer Figur und die Vorbereitung zum Beweise gegeben: so brauchen Sie, nachdem Sie den vierten Satz kennen gelernt haben, zur Erfindung des Beweises des fünften Satzes nichts weiter, als nur diese Regeln genau zu befolgen. Um dies jedesmal thun zu können, muß man sich aber auch jede Behauptung aufs deutlichste, und mit allen ihren Folgerungen vorstellen.

Verbinden Sie nun hiermit dasjenige, was ich im dritten Briefe von S. 23 bis zu Ende über die

Erfindung der Aufgaben und Lehrsätze gesagt habe: so werden Sie Sich eine ganz deutliche Vorstellung machen können, wie die zwölf ersten Sätze des Euclides unmittelbar aus den anfänglich gegebenen Erklärungen vermittelst der Forderungen und Grundsätze hergeleitet werden können.

Um nun bei dieser Gelegenheit das so eben aus dem dritten Briefe Angeführte fortzusetzen, so endigen sich mit dem zwölften Satze diejenigen Sätze, auf welche die Betrachtung einer begrenzten geraden Linie führt. Der nächste Gegenstand, der sich nun zur Untersuchung darbietet, ist der ebene und geradlinige Winkel. Construirt man denselben, so führt die Verlängerung des einen Schenkels zu den Nebenwinkeln. Diese zu untersuchen, muß man sie mit dem rechten Winkel vergleichen, und um dies bequem thun zu können, aus der gemeinschaftlichen Spitze über den beiden in gerader Linie liegenden Schenkeln eine senkrechte Linie aufrichten. Auf diese Art kommt man gerades Weges zu dem dreizehnten Satze des Euclides, aus welchem man durch die Umkehrung desselben zu dem vierzehnten gelangt. Verlängert man nun auch den andern Schenkel des anfänglich construirten Winkels, so entdeckt man bei einiger Aufmerksamkeit auch den funfzehnten Satz, muß aber auch damit fürs erste die Betrachtung der ebenen und geradlinigen Winkel endigen.

Zu was für einem Gegenstande soll man aber nunmehr fortgehen? Zu der Figur überhaupt? Diese läßt sich nicht construiren. Also zum Kreise? Aber

Aber die Construction desselben sind wir nach dem Bisherigen noch nicht im Stande so zu verändern, daß wir dadurch die Eigenschaften des Kreises wahrzunehmen im Stande wären. Also muß die geradlinige Figur, und zwar zuerst das Dreieck folgen.

Entwirft man die Construction eines Dreiecks, und verlängert die eine Seite desselben, so erhält man einen äußern Winkel. Die Vergleichung desselben mit dem innern anliegenden Winkel ist leicht, aber auch nicht wichtig; könnte man ihn also nicht etwa mit den innern gegenüber stehenden vergleichen? Zwei Winkel die man nicht unmittelbar mit einander vergleichen kann, und die keine Verticalwinkel sind, auf eine mittelbare Art nach einander zu bestimmen, enthält das Bisherige keinen andern Weg, als daß man sie zu Winkeln in Dreiecken zu machen sucht, von denen man zeigen kann, daß sie sich decken. Hierzu bietet sich nun außer dem äußern Winkel bloß derjenige von den innern gegenüber stehenden dar, der mit ihm einen Schenkel gemein hat; und das nächste Mittel die gedachte Absicht zu erreichen, ist, den so eben gedachten Schenkel in zwei gleiche Theile zu theilen. Ist dies geschehen, so kann man zwischen dem Halbirungspunkte und der Spitze des gegenüber liegenden Winkels eine gerade Linie ziehen, diese Linie verlängern, die Verlängerung der verlängerten Linie gleich machen, und nun auch ihren Endpunkt mit der Spitze des äußern Winkels durch eine gerade Linie verknüpfen. Durch diese Anwendung

der

der ersten und zweiten Forderung, und des dritten Satzes des Euclides erhält man die 9te Figur, und eine genaue Betrachtung derselben führt zunächst auf den Satz, daß in jedem Dreiecke, worin eine Seite verlängert worden, der äußere Winkel größer sey, als derjenige von den innern gegenüber stehenden, der mit ihm einen Schenkel gemein hat. Nun ferner, wie Figur 10, auch die Seite AC nach G verlängert, so ist nach dem so eben gefundenen Satze der äußere Winkel BCG auch größer als der Winkel B, und da der Winkel BCG nach dem funfzehnten Satze des Euclides dem Winkel ACD gleich ist, so ist klar, daß in jedem Dreiecke, worin eine Seite verlängert worden, der äußere Winkel größer sey, als jeder von den innern gegenüber stehenden. Auf diese Art findet man den 16ten Satz des Euclides. Wollte man nun etwa auch die übrigen Seiten des Dreiecks ABC Fig 10 verlängern, so würde das auf nichts Neues führen; folglich ist das Nächste, daß man, so wie man vorhin nur unbestimmt verlängerte, nunmehr die Verlängerung der anliegenden Seite gleich macht, und darauf die erste Forderung befolgt. So erhält man die Figur, die bei Euclides zwanzigstem Satze steht, allein einen Lehrsatz da zu finden reicht das Bisherige nicht hin. Von den Forderungen ist nun weiter keine übrig als die dritte; aber durch ihre Befolgung werden wir dahin geleitet, daß wir von einer der größern Seiten ein der kleinern Seite gleiches Stück abschneiden; und so sind wir auf dem Wege, Euclids achtzehnten, und durch die Umkehrung des-

desselben auch seinen neunzehnten Satz zu finden. Wenden wir uns aber, nachdem wir diese beiden Sätze kennen gelernt haben, wieder zu der Betrachtung der Figur bei Euclides zwanzigstem Satze, die wir vorher fanden, ohne dabei einen Satz entdecken zu können: so ist nunmehr die Findung von Euclides zwanzigstem Satze ebenfalls leicht. Jetzt die eine Seite eines Dreiecks nach beiden Seiten verlängert, und beide Verlängerungen den angrenzenden Seiten gleich gemacht: so führt die Betrachtung der dadurch erhaltenen Construction zu Euclides zwei und zwanzigstem Satze, und der Uebergang von diesem zu dem drei und zwanzigsten ist sehr leicht. Nun ist man aber auch im Stande, Dreiecke von ungleichen Winkeln auf einander zu legen, und so ist die Entdeckung des vier und zwanzigsten und des fünf und zwanzigsten Satzes hinlänglich vorbereitet; und was endlich den sechs und zwanzigsten betrifft, so ist die Gleichheit zweier Dreiecke schon zweimal aus drei Stücken bestimmt worden, es ist also natürlich, daß man am Ende der Untersuchung der Dreiecke auch die noch übrigen Fälle überdenkt, und da kann man diesen Satz nicht verfehlen.

Hier will ich für diesmal stehen bleiben, und das Uebrige so lange versparen, bis ich mit Ihnen über Euclids eilften Grundsatz geredethaben werde; ja ich würde auch das Gegenwärtige verschoben haben, wenn sich mir dazu hier nicht eine so bequeme Gelegenheit dargeboten hätte. Eins muß ich

aber noch anmerken, dies nemlich, daß wir auf dem gegangenen Wege Euclids ein und zwanzigsten Satz nicht finden. Hätte ich mir einige Seitenblicke erlaubt, so wäre es mir leicht gewesen, auch auf ihm zu kommen; ich werde nachher Gelegenheit haben Ihnen zu zeigen, wie der zwanzigste Satz zu ihm leiten kann. Allein ich wollte nichts aufnehmen, als was sich auf dem geraden Wege darböte, und vielleicht finden wir in der Folge auch, daß dieser Satz eigentlich nicht zu den Elementar-Sätzen gehöre, und wohl gar nicht eine solche Wichtigkeit habe, daß er verdiene besonders gemerkt zu werden.

Bei dieser Gelegenheit auch die Frage: Wenn man auf die vorhin beschriebene Art die geometrischen Sätze aufsucht, so muß man in der Betrachtung der jedesmaligen Gegenstände immer bis zu einem gewissen Punkte fortgehen. Wie weit nun aber? denn ein Kennzeichen muß man doch haben, um seine Betrachtungen weder zu früh zu endigen, noch zu weit fortzusetzen. Die Antwort darauf ist: So weit, bis man auf Sätze kommt, zu deren deutlichen Vorstellung bloß die anfänglich entworfene Construction, und keine von den nachmals gezogenen Hülfslinien nöthig ist. Nehmen Sie z. B. die 9te Figur. Sie finden, wenn Sie dieselbe untersuchen, nach und nach folgende Sätze:

$$\triangle FEC = \triangle AEB$$
$$FCE = BAE$$
$$ACD > BAC$$

Erst

Erst den letzten von diesen drei Sätzen sind Sie im Stande, sich deutlich vorzustellen, ohne dabei eine von den Hülfslinien BE EF, CF zu Hülfe zu nehmen, und bis zu ihm mußten Sie daher fortgehen, ehe Sie sich schmeicheln konnten, einen Lehrsatz gefunden zu haben. Nehmen Sie ferner an, daß Sie auf die Figur beim 18ten Satze des Euclides gekommen wären. Hier finden sie nach und nach

$$ABD = ADB$$
$$ADB > ACB$$
$$ABD > ACB$$
$$ABC > ABD$$
$$ABC > ACB$$

Auch hier hat wieder erst der letzte Satz die vorhin beschriebene Beschaffenheit.

Man kann sich dieses Umstandes ebenfalls bedienen, um darnach die Betrachtung der Constructionen selbst zu leiten. Kennt man den Ort, wo das Ziel liegt, welches man erreichen soll: so ist die Richtung des Weges dahin keine schwer zu bestimmende Sache. Bei dem zuletzt erwähnten Satze z. B. führt das gegebene Kennzeichen sehr bald darauf, daß man in der Behauptung, ABD = ADB, an Statt ABD den Winkel ABC, und an Statt ADB den Winkel ACB zu erhalten suchen müsse.

Nun zu dem zweiten Punkte, zur Betrachtung nemlich der Sätze, welche die Neuern anders als

Euclides behandeln, und dabei zugleich zu den Anmerkungen, welche Sie zum Verständniß des Kästnerischen Lehrbuchs nöthig haben.

Zuvörderst also finden Sie S. 180. 181 des Kästnerischen Lehrbuchs Euclids 5ten und 6ten Satz, desgleichen die erste Hälfte des 26sten Satzes auf eine ganz andere Art, als vom Euclides behandelt. Euclides hat alle diese Sätze als Lehrsätze betrachtet, beim Hrn. Hofr. Kästner finden sie den 5ten und 6ten Satz als Zusätze. Außerdem stehen auch in dem Kästner'schen Lehrbuche einige Erweiterungen, die Sie im Euclides vergeblich suchen. Der wesentlichste Unterschied aber, woraus sich *alles* übrige herleiten läßt, besteht darin, daß der Hr. Hofr. Kästner den Beweis der gedachten Sätze auf den 8ten Grundsatz, Euclides hingegen auf die vorher erwiesenen Lehrsätze baut. Der Weg den der Hr. Hofr. Kästner einschlägt, hat offenbar den Vorzug einer größern Kürze, die Einsicht hingegen, welche man durch Euclids Verfahren erhält, hat einen höhern Grad der Deutlichkeit. Je nachdem also jemanden an dem einen oder an dem andern mehr gelegen ist, je nachdem kann auch bald die Euclideische, bald die Kästnerische Verfahrungsart vorzuziehen seyn. Was das Mehrere betrifft, so Sie in dem Kästnerischen Lehrbuche bei diesen Sätzen finden, so sind das Erweiterungen, auf welche wir bei der versprochenen dritten Betrachtung kommen werden; wenn Sie aber bei dem Hrn. Hofr. Kästner den zweiten Theil des 26sten

Satzes

Satzes des Euclides nicht finden, so rührt das daher, weil die Lehre von den Parallellinien einen Satz an die Hand giebt, welcher in Verbindung mit der ersten Hälfte des gedachten 26sten Satzes die besondere Betrachtung der zweiten Hälfte dieses Satzes überflüssig macht. Vermittelst der Sätze von den Parallellinien nemlich lernen wir, daß alle drei Winkel eines Dreieck zwei rechten Winkeln gleich sind, und daß also, wenn in zweien Dreiecken zwei Winkel gleich sind, auch die dritten Winkel einander gleich seyn müssen. Sobald also dieser Satz zu Hülfe genommen werden kann, so läßt sich durch ihn die andere Hälfte des 26sten Satzes auf die erste Hälfte zurückführen; und es kann jenes geschehen, weil man die zweite Hälfte des 26sten Satzes nicht vor den Sätzen von den Parallellinien braucht.

Ferner finden Sie den 7ten und 8ten Satz des Euclides vom Hrn. Hofr. Kästner S. 182 ebenfalls auf eine andere Art behandelt. Euclids siebenten Satz finden sie nemlich im Kästnerschen Lehrbuche nicht besonders, so wie ich auch schon im dritten Briefe, S. 26, bemerkt habe, daß er füglich mit dem achten Satze zusammengezogen werden kann. Außerdem hat Euclides die apogogische, der Hr. Hofr. Kästner aber die directe Beweisart gewählt. Mancher findet die apogogischen Beweise schwer, und dem muß also der Kästnerische Beweis sehr willkommen seyn. Aber wenn man da auch gleich sagen könnte; daß dieser Schwierigkeit durch eine genaue

Betrachtung der apogogischen Beweisart abgeholfen werden könne: so hat denn doch der Kästnerische Beweis vor dem Euclideischen in Ansehung der Kürze einen beträchtlichen Vorzug. Denn soll Euclids siebenter Satz vollständig bewiesen werden, so ist das, was Hr. Lorenz hat, bei weitem nicht hinlänglich. Sollte nemlich der Punkt D nicht in C fallen, so müßte er entweder in eine von den beiden Linien AC und BC oder außerhalb dieser Linien fallen. Fände das erste Statt, so fiele er entweder, wie Fig. 11, in eine von diesen Linien zwischen ihre beiden Endpunkte, oder jenseits derselben in die Verlängerung, wie Fig. 12. Sollte das andere seyn, so könnte D entweder außerhalb des Dreiecks CAB, wie Fig. 13, oder innerhalb desselben fallen. Die beiden ersten Fälle aber sind unmöglich, weil weder Fig 11. noch Fig. 12 AC = AD seyn kann. Der dritte findet auch nicht Statt, davon findet man den Beweis in Hrn. Lorenz Uebersetzung. Was endlich den vierten Fall betrifft, so ziehe man Fig. 14 die Linie CD und verlängere AC nach E und AD nach F. Da nun

AC = AD seyn soll, so müßte
wegen S. 5. ECD = CDF und also
BCD $<$ CDF seyn. Da aber auch
BC = BD seyn soll, so müßte
wegen S. 5 BCD = CDB und also
BCD $>$ CDF seyn.

Da es aber unmöglich ist, daß BCD zu gleicher Zeit $<$ und $>$ als CDF sey, so kann der Punkt

Punkt D auch nicht innerhalb des Dreiecks CAB fallen; und nun erst läßt sich mit vollem Rechte schließen, daß er auf A fallen müsse. Aber fällt nun nicht auch in die Augen, daß der Kästnerische Beweis viel kürzer sey? Das Einzige, was man dawider einwenden könnte, wäre also auch nur dies, daß man, wenn man den Beweis nach den Grundsätzen und Forderungen zu finden sich vornähme, man keinen Grundsatz hätte, welcher darauf führte, daß man die beiden Dreiecke an einander legen sollte; dahingegen Euclids Beweis zu finden, die von ihm mitgetheilten Forderungen und Grundsätze hinreichen.

Was Sie in des Hrn. Hofr. Kästners Lehrbuche S. 183. 184 über die Aufgaben Satz 9 bis 12 des Euclides finden, bedarf hier keine Anmerkung. Den dreizehnten, vierzehnten und funfzehnten Satz des Euclides hat der Hr. Hofr. Kästner in dem achten Satze, S. 185, und was Sie im Euclides vom sechszehnten bis zum sechs und zwanzigsten Satze finden, in dem neunten Satze, S. 186 bis S. 190, zusammengefaßt. Bei diesen Sätzen kann ich die jetzt nöthige Vergleichung Ihnen allein überlassen; und ich bemerke hier nur, daß wir den vier und fünf- und zwanzigsten Satz des Euclides in des Hrn. Hofr. Kästner Lehrbuche nicht, dagegen aber manche Erweiterungen, von denen ich nachher ausführlich sprechen werde, finden. Daß ein Mann, wie der Hr. Hofr. Kästner sich bei dem Vortrage der ersten Gründe der Geometrie sich so wenig vom

Euclides entfernt, als wir es bis jetzt gefunden haben, ist ohnstreitig für die Güte der Euclideischen Elemente das stärkste Zeugniß, und erinnert an die Behauptung eben dieses großen Mathematikers: daß von den vielen geometrischen Lehrbüchern, die wir jetzt haben, jedes von dem eigenen Werthe der Geometrie, Deutlichkeit und Gewißheit, desto weniger habe, je weiter es sich von Euclids Elementen entfernet. Die Entfernungen, welche man in des Hrn. Hofr. Kästners Lehrbuche antrifft, darf man indeß nicht hierher rechnen, oder man müßte behaupten wollen, daß Euclides in aller Absicht das höchste Ideal erreicht habe, und daß sein Werk nicht bloß als Elemente betrachtet das Beste sey, sondern auch einen in jeder Rücksicht vollkommenen Unterricht in der Geometrie enthalte.

Eilfter Brief.

Fortsetzung der Anmerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen des ersten Buchs der Elemente des Euclides.

Mit dem sechs und zwanzigsten Satze endigt Euclides fürs erste die Betrachtung der Dreiecke, und fängt also mit dem sieben und zwanzigsten die Untersuchung der Vierecke und Vielecke überhaupt an. Da hiezu die Lehre von den Parallellinien unentbehrlich war, so beschäftigen sich die zunächst folgenden Sätze mit diesem wichtigen Gegenstande.

Was

Was im sieben und zwanzigsten und acht und zwanzigsten Satze davon enthalten ist, ist ungemein leicht u d gründlich; allein der neun und zwanzigste Satz ist von jeher als ein Satz betrachtet worden, der in Ansehung der Schärfe des Beweises den übrigen Sätzen des Euclideischen Systems weit nachstehe. Der Grund hiervon liegt darin, weil man bei diesem Satze Euclids eilften Grundsatz gebraucht: Zwei gerade Linien, die von einer dritten geschnitten werden, so daß die beiden innern an einer Seite liegenden Winkel zusammen kleiner sind, als zwei rechte, treffen, genugsam verlängert, an eben der Seite zusammen; und daß man diesem Grundsätze die Evidenz abspricht, die er als Grundsatz haben müsse. Hier ist also zweierlei zu thun

Einmal müssen wir uns davon zu überzeugen suchen, daß dieser Satz, wenn auch seine Wahrheit nicht so leicht in die Augen fällt, als die Wahrheit der übrigen Grundsätze, gleichwohl ein Satz sey, dem es auf keine Weise an Gewißheit fehle.

Zweitens müssen wir untersuchen, ob Euclides ein Recht gehabt, diesen Satz unter die Grundsätze aufzunehmen? oder ob er ihn nicht vielmehr, wie solches verschiedene nach ihm versucht haben, unter die Sätze hätte setzen sollen?

Was nun das erste betrift, so nehmen Sie an, daß Fig. 15, indem die beiden geraden Linien AB und CD von der dritten EF in G und H geschnit-

ten werden, die Winkel BGH und DHG zusammengenommen kleiner als zwei rechte Winkel seyn. Lassen Sie alsdann R einen rechten Winkel bedeuten, so ist, da

$$BGH + DHG \lessdot 2\,R,$$ nach der Voraussetzung, und

$$DHG + DHF = 2\,R,$$ nach Satz 10 ist,

$$BGH \lessdot DHF.$$

Legen Sie also in Gedanken die Spitze G des Winkels BGH auf H die Spitze des Winkels DHF, und den Schenkel GH des Winkels BGH auf HF, den Schenkel des Winkels DHF; so wird, da BGH $\lessdot$ DHF ist, der andere Schenkel des Winkels BGH, nemlich GB, innerhalb der beiden Schenkel DH und HF des Winkels DHF fallen, und Fig. 16. also HI, welches den Schenkel GB in der beschriebenen Lage vorstellt, mit HD keinen Punkt als H gemein haben. Nun lassen Sie den Schenkel HF, als den Schenkel des heruntergelegten Winkels BGH, immer auf der Linie FH GE bleiben, und rücken Sie so die Spitze H und folglich den ganzen Winkel IHF = BGH nach G hinauf. Sobald H aus der Linie HD z. B. in h tritt, gehen die beiden geraden Linien HD und HI durch zwei nicht gemeinschaftliche Punkte, und können also, nach S. 62. 2., nicht mehr als einen Punkt mit einander gemein haben; und da jenes beständig bleibt, so weit auch H hinauf nach G gerückt wird, so ist auch dieses wahr, H mag in der Linie HGE so weit hinauf rücken als man nur immer will.

will. Aber nun nehmen Sie die HD und HI ehe Sie den Punkt H nach G hinaufrücken, unbegrenzt, oder so an, daß Sie dieselben, so weit sie auch schon verlängert seyn mögen, doch noch immer weitere verlängern können. Ist dies, so müssen die beiden Linien HD und HI, H mag sich in der Linie HGE so weit von H entfernen als es will, auch immer einen Punkt mit einander gemein behalten, oder immer sich schneiden. Denn da HD unbegrenzt ist, so kann keiner von den Punkten, die man in der unbegrenzten Linie HI annehmen kann, z. B. I, K, L u. s. f. über die HD kommen, ohne durch sie, und zwar einer nach dem andern, gegangen zu seyn; wie weit von oder wie nahe an einander man sich aber auch die Punkte I, K, L u. s. f. vorstellen, und wie viel oder wie wenig man sich, indem man H um einen bestimmten Theil nach G hinaufgerückt hat, als bereits durch AD gegangen denken mag: so bleiben doch, da die Zahl dieser Punkte keine Grenzen hat, immer noch welche zurück, die noch nicht durch HD gegangen sind, und einer von ihnen muß in ihr liegen, indem alle andere unter ihr sind. Eben das findet noch Statt, wenn H nach G, und also der heruntergeruckte Winkel wieder in seine erste Lage kommt, und es treffen also die Schenkel GB und HB, genugsam verlängert, endlich zusammen.

Hoffentlich ist diese Auseinandersetzung hinlänglich, um sie von der Wahrheit des Satzes zu überzeugen, daß jede zwei gerade Linien, die von einer dritten geschnitten werden, so daß die beiden innern,

nern, an einer Seite liegenden, Winkel zusammen kleiner als zwei rechte Winkel sind, genugsam verlängert, an eben der Seite zusammen treffen; ja vielleicht glauben Sie, daß man dadurch zu einer vollkommenen Gewißheit gelange. Eine solche Stärke lege ich indeß, ohnerachtet ich einiges Interesse dabei hätte, wenn ich es thun könnte, dieser Auseinandersetzung nicht bei. Der Herr Hofr. Kästner hat den angeführten Grundsatz S. 192—194 auf eine andere Art dargethan, und ich zweifele nicht, daß Sie das darüber von ihm Gesagte, nachdem Sie es mit Aufmerksamkeit werden durchlesen haben, ohne weitere Anmerkung von mir, so wie ganz verstehen, also auch vortreflich *finden* werden. Aber der Herr Hofr. Kästner schließt mit den Worten: Diese Betrachtungen werden uns berechtigen, folgendes anzunehmen: Wenn zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, u. s. w. Soll ich meiner Erläuterung eine stärkere Beweiskraft beilegen als der Hr. Hofr. Kästner der seinigen? Und gesetzt es schiene mir meine Erläuterung, wie das nicht ist, ganz ohne allen Tadel zu seyn: so würde ich Ihnen doch rathen, sie für nichts weiter anzusehen, als für ein Mittel, sich von der Wahrheit des eilften Grundsatzes des Euclides zu überzeugen. Warum das? Es haben sich von jeher eine Menge von Mathematikern damit beschäftigt, diesen Grundsatz in voller Evidenz darzustellen, haben auch größtentheils geglaubt, ihr Ziel erreicht zu haben, und doch haben andere ihre Bemühungen hinterher für unzulänglich erklärt.

Da-

Damit sie hiervon einigen deutlichern Begriff erlangen mögen, so führe ich an, daß der Herr Prof. Klügel in Helmstädt in einer 1753 zu Göttingen geschriebenen Dissertation, mit dem Titel: Conatuum praecipuorum Theoriam Parallelarum demonstrandi recensio; acht und zwanzig Versuche von der angeführten Beschaffenheit gesammelt hat, und daß nach der Zeit dazu verschiedene neuere gekommen sind. Um nur die vorzüglichsten zu nennen, so gab der Hr. Hofr. Karsten, dessen Tod kürzlich jedem, dem die Ausbreitung und Vervollkommung der Mathematik am Herzen liegt, eine tiefe Wunde geschlagen hat, im Jahr 1778 beim Antritte seines Lehramts in Halle einen Versuch einer völlig berichtigten Theorie der Parallellinien heraus; im Jahr 1781 lieferte der Herr Professor Hindenburg in Leipzig, im zweiten Stücke des Leipziger Magazins zur Naturkunde, Mathematik und Oeconomie für dieses Jahr, ein neues System der Parallellinien, und im dritten Stücke eben dieses Jahrgangs Anmerkungen darüber; 1783 erschien vom Hrn. Hofprediger Schulz in Königsberg eine entdeckte Theorie der Parallelen nebst einer Untersuchung über den Ursprung ihrer bisherigen Schwierigkeit, die 1786 bereits zum zweitenmale wieder aufgelegt, und von einer Darstellung der vollkommenen Evidenz und Schärfe dieser Theorie von dem Hrn. Hofprediger begleitet wurde; und endlich gab der Hr. Hofr. Karsten in seinen 1786 herausgegebenen mathematischen Abhandlungen nochmals einen

Aufsatz von den Parallellinien und den neuern Bemühungen, die Theorie davon zu ergänzen heraus. Ich habe hier nur die vornehmsten Versuche angeführt, sonst hätte ich auch des Versuchs von Gensichen, wodurch die Schulzensche Theorie gerechtfertiget werden soll, und einer kürzlich in Leipzig gehaltenen Dissertation, worin dieselbe Theorie für unzulänglich erklärt wird, gedenken müssen; allein das setze ich noch hinzu, daß man auch in dem ersten Bande des Leipziger Magazins für die Mathematik, welches eine Fortsetzung des vorhingedachten Magazins ist, verschiedenes hieher gehörige findet. Uebrigens gehört die Beurtheilung der angeführten Versuche jetzt *weder* für Sie, noch für mich; nur von dem Meinigen muß ich ein Paar Worte sagen, gesetzt auch, daß einem oder dem andern, der etwa außer Ihnen diese Briefe lesen möchte, die Fabel von der Henne einfallen sollte, die erst ein Ey legt, und dann es critisirt. Allenfalls könnte ich antworten, daß die Henne nicht gackere, um ihr Ey zu loben, und sich damit zu brüsten, daß sie es gelegt hat, sondern um sein Daseyn dem, der es zu wissen braucht, anzuzeigen; und sollte das nicht gelten, so bliebe mir vielleicht übrig, den ganzen Versuch einem andern beizulegen, und den Ausdruck der Meinige bloß als eine Abkürzung zu erklären.

Mir gefällt also mein Versuch unter andern wegen der Art, wie ich darauf gekommen bin. Ich bediente mich sonst, wie Ihnen aus meinen socratischen

tischen Gesprächtn über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie bekannt seyn wird, einer andern Art der Erläuterung, die mir aber selbst vom Anfang an keine volle Gnüge that, weil darin ein Umstand benutzt wird, den ich in gehöriger Schärfe darzuthun nicht im Stande bin. Indeß half ich mir damit, wenn es darauf ankam, den berühmten Grundsatz durch bloße Entwickelung der im Euclides vor dem acht und zwanzigsten Satze vorhergehenden Sätze wahrscheinlich zu machen, und wenn ich das nicht nöthig hatte, so kam mir die Auseinandersetzung des Hrn. Hofr. Kästners sehr gut zu statten. Als man aber vor einigen Jahren die Untersuchung dieses Grundsatzes vom Neuen anfing, so brachte mich ein Versuch darüber, der, wenn er in Betrachtung kommen soll, es blos wegen seiner Schwäche kann, auf den Gedanken: Ob es nicht möglich sey, nach den Regeln, nach welchen man Euclides Elemente eigentlich entwickeln muß, auf eine befriedigende Erläuterung seines eilften Grundsatzes zu kommen, und zwar so, daß man diese Erläuterung auch allenfalls vor allen seinen Sätzen, oder schon bei der Erklärung der Grundsätze geben könnte? Ich stellte mir also die vorhergehenden Grundsätze, und insbesondere den achten, ausführlich entwickelt, und in die Sätze, welche er unter sich begreift, aufgelöset, vor, und glaubte mir durch das Aufeinanderlegen der Winkel BGH und DHF helfen zu dürfen. Daß, wenn BGH + GHD $<$ 2 R, der Winkel BGH $<$ DHF sey, erschien mir freilich als eine Behauptung, die den 13ten Satz des

Eucli-

Euclides voraussetze. Indeß wenn der *eilfte* Grundsatz, wo er steht, erläutert werden soll, so kann man den 13ten Satz vorläufig darthun und gebrauchen, ohne daß ihm dadurch nachmals die ihm vom Euclides gegebene Stelle entzogen würde. Was nun weiter nöthig war, ist aus der mitgetheilten Erläuterung klar, so daß ich zu einigen anderweitigen Anmerkungen fortgehen kann.

Man erklärt bisweilen die Grundsätze durch Sätze, deren Wahrheit in die Augen leuchtet, sobald man nur die Worte, worin sie eingekleidet *sind*, versteht. Dieses Kennzeichen hat Euclids eilfter Grundsatz offenbar nicht, er muß erläutert werden, wenn man sich von seiner Richtigkeit über*zeugen* will. Allein besser ist es auch ohnstreitig, sich die Grundsätze als Sätze zu gedenken, die den Grund von andern enthalten, ohne gleichwohl in andern gegründet zu seyn; und dann eine zwiefache Art von Grundsätzen zu unterscheiden, einmal solche, die es im strengsten Verstande sind, und zweitens, solche, die aus jenen durch die Entwickelung und Anwendung derselben auf die ersten untergeordneten speciellen Fälle hergeleitet werden können. Da man mit den Grundsätzen der erstern Art bei der Untersuchung allein nicht auskommt, so wäre es unrecht, die zweite Gattung aus der Sammlung der Grundsätze ausschließen zu wollen. Sollte Euclides zwölfter Grundsatz nicht ebenfalls einer Erläuterung bedürfen, wenn er vollkommen einleuchtend werden soll? und doch macht man diesem Grundsatze seine Stelle nicht streitig.

Nun wiederhole ich es nochmals, daß ich meiner Erläuterung des eilften Euclideischen Grundsatzes nicht alle nur mögliche Schärfe beilege; aber das weiß ich, daß sie für Sie befriedigend seyn wird; und vielleicht läßt sich derselben das, was ihr noch fehlt, ohne eine wesentliche Veränderung darin vorzunehmen, zu einer andern Zeit hinzusetzen.

Jetzt frägt sich: Ob Euclides recht daran gethan, daß er den eilften Grundsatz da, wo wir denselben bey ihm finden, mitgetheilt hat? Größtentheils liegt die Antwort auf diese Frage schon in dem Gesagten; und was davon noch übrig ist, erfordert einige von den Betrachtungen, die ich bei der Erklärung der Art und Weise, wie man Euclids Elemente weiter fortführen kann, anzustellen haben werde. Jetzt bemerke ich nur noch, daß der Gesichtspunkt, welchen wir Br. 3. S. 21. für die Grundsätze angenommen haben, eine Rechtfertigung des Euclides an die Hand geben würde, wenn auch sein eilfter Grundsatz einen eigentlichen und vollen Beweis erforderte. Denn da man diesen Satz bei der Untersuchung der Parallellinien, und alles dessen, was sich darauf bezieht, gar nicht entbehren kann, um das, was dabei zu bemerken ist, zu finden oder in den Constructionen wahrzunehmen: so mußte er, sollten anders die Regeln der Wahrnehmung bei diesen Constructionen vom Anfang an insgesammt mitgetheilt werden, nothwendig da stehen, wo wir ihn finden, gesetzt auch, daß sein Beweis erst später hätte mitgetheilt werden können.

Zwölfter Brief.

Fortsetzung der Anmerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen des ersten Buchs der Elemente des Euclides.

Sobald Euclids eilfter Grundsatz als ausgemacht vorausgesetzt und gebraucht werden kann, hat die ganze Lehre von den Parallellinien, welche von dem sieben und zwanzigsten Satze an den übrigen Theil des ersten Buchs der Euclideischen Elemente ausmacht, und dasjenige von den Vierecken und Vielecken mit in sich faßt, was davon an den gegenwärtigen Ort gehört, nicht nur nicht die mindeste Schwierigkeit, sondern folgt nunmehr auch nothwendig, und ist dabei in einer solchen Ordnung vorgetragen, daß man nur nöthig hat, auf dem angefangenen Wege fortzufahren, um alles von selbst zu finden. Wollte man nemlich nach der Vollendung der bisherigen Betrachtung der Dreiecke unmittelbar zur Betrachtung der Vierecke und Vielecke jeder Art fortgehen: so würde man dieselben zwar durch Diagonalen, oder gerade Linien, die man zwischen zweien gegenüberliegenden Winkelspitzen zöge, und also durch Anwendung der ersten Forderung, in lauter Dreiecke theilen können; aber nach einiger Ueberlegung auch bald einsehen, daß man mit den bisher erworbenen Kenntnissen nicht ausreichte. Nun hatten uns (Br. 2. S. 13 f.) Drei Punkte in Einer Ebene zu den Begriffen theils

von

von der Figur überhaupt, theils von den Arten derselben geführt, welche am genannten Orte vorkommen: was bleibt uns also jetzt, wenn wir weiter gehen wollen, übrig, als zu vier Punkten in Einer Ebene fortzugehen? Wollten wir aber diese vier Punkte so annehmen, daß die geraden Linien, die wir durch je zwei und zwei von ihnen zögen, verlängert; einander träfen: so gelangten wir dadurch bloß zu den bereits betrachteten Gegenständen, und es ist daher unvermeidlich, auf den Begriff der Parallellinien zu stoßen, und dieselben zugleich als den *nunmehr* folgenden Gegenstand der Untersuchung kennen zu lernen. Wenn sind zwei gerade Linien so beschaffen, daß sie, soweit man sie auch nach beiden Seiten verlängern mag, auf keiner Seite zusammen stoßen? ist dabei offenbar die erste; und: Durch was für Eigenschaften unterscheiden sich zwei Parallellinien von andern? eben so deutlich die zweite Frage. Jene wird im *sieben und* und *acht und zwanzigsten*, diese im *neun und zwanzigsten* Satze vom Euclides beantwortet. Die Beantwortung der letzten Frage aber führt auf ein neues Kennzeichen der Parallellinien, und dieses folgt also ganz natürlich im dreißigsten Satze, so wie nun die Aufgabe, Satz 31, welche Parallellinien construiren lehrt; denn ohne die Construction der Parallellinien läßt sich an keine weitere Untersuchung derselben denken. Nach Br. 3. S. 23 oben, muß man, wenn ein schon betrachteter Gegenstand hinterher von einer neuen Seite erwogen werden kann, wieder zu demselben zurückkehren, und dabei

geht denn natürlicher Weise diese Untersuchung schon dagewesener Gegenstände vor der Betrachtung ganz neuer vorher. Das ist der Grund von der Folge des zwei und dreißigsten Satzes. Was ist nun zu thun? Die bisher betrachteten Parallellinien zogen wir unbegrenzt; wollen wir weiter, und schrittweise weiter gehen, so müssen wir unsern Blick auf begrenzte Parallelen richten. Zwei einander gleiche Parallellinien also angenommen, und dabei die erste Forderung befolgt, so bietet sich der drei und dreißigste dar, der uns zu dem Begriffe von einem Parallellogramm, und zugleich zu der ersten Behauptung davon im vier und dreißigsten Satze führt. Das, was wir auf diese Art von den Parallelogrammen lernen, ist von der Art, daß der Gedanke an die Vergleichung zweier Parallelogrammen nicht wohl vermieden werden kann. Dazu muß man zuvörderst Parallelogramme nehmen, die so viel Dinge als möglich mit einander gemein haben, und so findet man den fünf und dreißigsten Satz; dann die Anzahl der gemeinschaftlichen Dinge, wo möglich, vermindern, und so gelangt man zum sechs und dreißigsten Satze. Ein jedes Parallelogramm ist nach dem vier und dreißigsten Satze das doppelte von einem Dreiecke: was ist daher natürlicher als die beiden genannten Sätze zur Vergleichung der Dreiecke zu gebrauchen. Versucht man es aber, so kommt man zu dem sieben und acht und dreißigsten, und durch die Umkehrung dieser beiden Sätze zu dem neun und dreißigsten und vierzigsten Satze, und daran schließt sich wieder unmittelbar die

Ver-

Vergleichung eines Parallelogramms und eines Dreiecks, welche im ein und vierzigsten Satze enthalten ist. Wie weit reicht nun dieses alles? Die Antwort ist: Bis zur Verwandlung eines Dreiecks in ein Parallelogramm mit einem gegebenen Winkel; und die Erklärung der Art und Weise davon giebt also die Aufgabe, Satz 42, an die Hand. Aber wie nun weiter? Ich dächte, wir kehrten zu der Figur des drei und dreißigsten Satzes zurück, die uns zuerst auf die Parallelogramme führte; vielleicht, daß die Betrachtung derselben noch nicht erschöpft ist? Nehmen wir in der Diagonale des Parallelogramms daselbst einen Punkt an, und legen durch denselben mit den Seiten des Parallelogramms Parallelen: so erhalten wir die Figur des drei und vierzigsten Satzes, und eine aufmerksame Betrachtung derselben läßt den drei und vierzigsten Satz selbst gar nicht verfehlen. Sucht man ferner von diesem Satze den erforderlichen Gebrauch zu machen, und man soll ja in der Geometrie bei allem, was was man lernt, auch soviel als möglich daran denken, wie und wozu man es anwenden könne: so ist der Weg zum vier und vierzigsten, und wenn man ihn gefunden hat, auch zum fünf nnd vierzigsten Satze gebahnt, und mit demselben schließt sich die Betrachtung der Parallelogramme. Könnten wir nun hier stehen bleiben, so wäre durch das Bisherige die Möglichkeit der Selbsterfindung alles dessen, was Euclids erstes Buch enthält, dargethan; allein es folgen noch drei Sätze, welche mit dem Vorhergehenden nicht in einem eben so ge-

nauen Zusammenhange zu stehen scheinen. Die Untersuchung der Parallelogramme überhaupt ist indeß geschlossen, und wir sind dadurch in den Stand gesetzt, die Betrachtung der in der dreißig- bis vier und dreißigsten Erklärung vorkommenden Figuren anzufangen. Wie man also zu dem sechs und vierzigsten Satze gelange, ist wenigstens ebenfalls nicht schwer einzusehen; und was den sieben und vierzigsten, oder den so berühmten Pythagorischen Lehrsatz betrifft, so war die Erfindung desselben seinem Urheber dem Pythagoras so wichtig, daß er dafür den Musen eine Hecatombe zum Opfer brachte, und wir können also in Ansehung seiner schon zufrieden seyn, wenn wir nur hinterher zu zeigen im Stande sind, daß er an den gegenwärtigen Ort gehöre. Einen Schritt weiter zu gehen ist uns aber gleichwohl erlaubt. So wie bei den Dreiecken und Parallelogrammen die Vergleichung derselben unter einander sich sehr bald darbot, so findet man nach einiger Ueberlegung nach dem sechs und vierzigsten Satze ebenfalls leicht, daß der nächste Schritt in der Untersuchung der Quadrate in der Vergleichung derselben bestehen müsse. Soll man nun etwa hier, so wie sonst Ein Dreieck mit Einem andern, und Ein Parallelogramm mit Einem andern, auch Ein Quadrat mit Einem andern vergleichen, und die Fälle festzusetzen suchen, wenn zwei Quadrate einander gleich sind? Aber die Vergleichung eines Quadrats mit einem andern ist so leicht, daß sie sich aus dem Begriffe des Quadrats vermittelst des achten Grundsatzes fast von selbst er-

giebt. Also müßte man wohl suchen, ein Quadrat mit mehrern und zunächst mit zweien zu vergleichen. Ists wahr, was verschiedene, nach der untenstehenden Anmerkung *) geglaubt haben, so zeigt das Gesagte die Möglichkeit der Erfindung des Pythagorischen Lehrsatzes selbst hinlänglich, zumal wenn es mit dem zusammengenommen wird, was ich

*) Inventio admirabilis atque pulcherrimi huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui vt scribit Vitruuius lib. 9. hostias Musis immolavit, quod se in tam praeclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, eum immolasse centum boues: si tamen Proclo credendum est, unum tantummodo obtulit. Fortasse autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit, vt theorema hoc inuestigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5, diligenter esset contemplatus, vidissetque, quadratum numerum maioris aequalem esse quadratis numeris reliquorum, composuit triangulum scalenum, cuius maximum latus diuisum erat in 5 partes aequales, minimum in 3 eiusdem magnitudinis, et reliquum in 4. Quo facto considerauit angulum sub his duobus lateribus contentum, inuenitque eum esse rectum; idque in quam plurimi aliis numeris, vt in 6. 8. 10, et 9. 12. 15. etc. obseruauit Quare inquirendum esse iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis aequale esset, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem secundum dictos numeros, continebant vnum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi voluptate adinuenit, firmaque ratione demonstrauit, Euclidis elementorum libr. XV. Auct. Chr. Clavio, Romae MDLXXXIX p. 234.

weiter unten über den Beweis dieses Satzes beibringen werde. Ist aber dieser Satz gefunden, so ist klar, wie man auf den acht und vierzigsten kommt, welcher das erste Buch beschließt.

Jetzt nehmen Sie des Hrn. Hofr. Kästners Lehrbuch zur Hand. Sie finden darin alles, was Euclides vom sieben und zwanzigsten Satze an in dem ersten Buche abgehandelt hat, von S. 190 bis S. 210, unter den Nummern 11 bis 15, in fünf Sätzen, davon aber ein jeder mehrere Zusätze hat. Der eilfte Satz, S. 190, ist Euclids sieben und acht und zwanzigster Satz, der zwölfte, S. 194, Euclids eilfter Grundsatz, der dreizehnte, S. 201, Euclids zwei und dreißigster, der vierzehnte, S. 204, Euclids fünf und und dreißigster, und der funfzehnte endlich S. 207 Euclids sieben und vierzigster Satz. Bei einer genauern Vergleichung werden sie wahrnehmen, daß sich der Hr. Hofr. Kästner in diesem Abschnitte vom Euklides vorzüglich auf eine dreifache Weise unterscheidet. Einmal in Ansehung der Ordnung, weil er alles, was sich zu einem Zusatze schickte, unter diesen Namen gebracht hat. Dadurch hat z. B. Euclids ein und dreißigster Satz die Stelle des ersten Zusatzes S. 191, ferner Euclids neun und zwanzigster Satz die Stelle des zweiten Zusatzes S. 195, desgleichen Euclids drei und vierzigster Satz die Stelle des zehnten Zusatzes S. 197 bekommen. Eben dies ist der Grund geworden, warum Euclids drei und dreißigster Satz beim Hrn. Hofr. Kästner, S. 196 Zus. 3. 4. eine

andere

andere Gestalt bekommen hat. Zum andern in Ansehung einer größern Ausführlichkeit bei verschiedenen Sätzen. Dahin rechne ich insbesondere den zwölften bis vierzehnten Zusatz, S. 199 bis 201, welche Betrachtungen enthalten, die selbst bei den geometrischen Untersuchungen, die jenseits der Grenze liegen, die sich Euclides setzte, wichtige Vortheile gewähren, und daher alle Aufmerksamkeit verdienen; so wie auch den vorhergehenden eilften Zusatz, der unter andern auch den vierten Satz aus Euclids zweitem Buche in sich begreift. Endlich drittens in Ansehung einer größern Gründlichkeit bei einigen Sätzen. Sie finden z. B. in Euclids acht und vierzigstem Satze den Satz: daß die Seiten zweier Quadrate, wenn die Quadrate gleich sind, selbst gleich sind, gebraucht, ohne daß derselbe vorher dargethan worden wäre: der Herr Hofr. Kästner aber spricht darüber ausdrücklich, S. 209. Auch den Beweis des fünf und dreißigsten Lehrsatzes des Euclids finden Sie beim Hrn. Hofr. Kästner ausführlicher, als im Euclides, nicht bloß in der Lorenzischen Uebersetzung, sondern auch im Original; doch haben ihn mehrere Kommentatoren des Euclides z. B. **Proclus** und **Clavius** ganz vollständig.

Da der Pythagorische Lehrsatz für die ganze Mathematik von der äußersten Wichtigkeit ist, so ist es nicht zu verwundern, daß er den Fleiß vieler Mathematiker beschäftigt hat, die wenigstens daran ihre Kräfte versuchen wollten, ob sie nicht andere

Beweise entdecken könnten. Wenn ich von den Beweisen abgehe, die die Lehre von der Proportionalität der Linien voraussetzen, und also hier nicht hergehören: so weiß ich nicht, ob man einen leichtern und bessern Beweis wird finden können, als den, welchen uns Euclides aufbehalten hat. Dies Urtheil bestätiget der Hr. Hofr. Kästner thätig dadurch, daß er eben denselben Beweis beibehalten hat, und der so berühmte Commentator des Euclides, Clavius, der selbst einen andern Beweis erfunden hat, giebt doch dem Euclideischen den Vorzug. Damit Sie wenigstens ein Paar von den übrigen Beweisen hier kennen lernen, so will ich zum Schluß dieses Briefes die des Clavius, und zwar *mit seinen eignen Worten*, aus der vorhin angeführten Edition S. 233 mittheilen.

Quoniam vero theorema hoc pulcherrimum est, utilitatesque habet insignes, operae pretium iudicaui tentare, num illud aliis viis demonstrari possit, variata aliquantulum constructione; quod Peletarius sine proportionibus fieri posse negauit. Sit ergo Fig. 27. rursus triangulum ABC, cuius angulus BAC, rectus sit, productisque lateribus BA, CA, ad partes anguli recti, fiant AD, AE, ipsis AC, AB, aequales; et per C, D, B, E, ipsis AB, AC, parallelae agantur coeuntes in F, G. Et quia in parallelogrammis CD, BE, tam latera DF, FC, oppositis lateribus AC, AD, quam latera EG, GB, lateribus oppositis AB, AE, aequalia sunt, erit vtrumque parallelogrammum aequilaterum: Sed et anguli

omnes

omnes recti sunt. Nam F, G, oppositis rectis DAC, EAB, aequales sunt, ideoque recti: anguli autem C, D, B, E, recti sunt, quum vteruis C, D, cum recto DAC, et vteruis B, E cum recto EAB, aequalis sit duobus rectis. Quadrata ergo sunt CD, BE, laterum AC, AB. Productis etiam lateribus FD, GE, donec conveniant in H, erigantur in B, C, ad BC, perpendiculares BI, CK, secantes GH, FH, in I, K, iungaturque recta IK. Et quia, si a rectis angulis IBC, ABG, auferatur communis angulus ABI, reliqui ABC, GBI, aequales sunt; sunt autem et recti anguli BAC, BGI, aequales; erunt duo anguli, A, B, trianguli ABC, *duobus* angulis *G, B,* trianguli GBI, aequales, vterque vtrique: Sunt autem et latera AB, GB, illis adiacentia aequalia, ob quadratum BE. Igitur et tam latera BC, BI, quam AC, GI, aequalia erunt, et reliqui anguli C, I, aequales. Non aliter in triangulis ABC, FKC, aequalia erunt tam latera BC, CK, quam AB, FK, et *anguli B,* K: propterea quod duo anguli *A, C, trianguli ABC,* duobus angulis F, C, trianguli FKC, aequales sunt, (cum A, F, recti sint, et duo anguli C, reliqui duorum rectorum, dempto communi ACK) et latera AC, CF, illis adiacentia aequalia, ob quadratum CD. Quare rectae BI, CK, inter se etiam aequales erunt. Cum ergo sint quoque parallelae, erunt etiam BC, IK, aequales et parallelae. Quadratum igitur est BCKI, lateris BC, cum quatuor eius latera sint aequalia, et omnes anguli recti, quod anguli I, K, oppositis rectis C, B, aequales sint. Dico ergo

go, quadratum CI, duobus quadratis BE, CD, aequale esse. *Ducta* enim ex H, per A, recta HTAL, ipsis BI, *CK*, parallela erit. Nam quia GE, ipsi BA, aequalis est, et EH, ipsi AD, hoc est, ipsi GI, quae ipsi *AC*, siue AD, ostensa fuit aequalis, erit et addita communi EI, tota HI, toti GE, hoc est ipsi AB, aequalis. Cum ergo HI, AB, sint etiam parallelae, erunt quoque BI, AH, parallelae et aequales. Eodemque modo AH, ipsi CK, parallela ostendetur, et aequalis. Quoniam igitur tam quadratum BE, parallelogrammo BH, super eandem basin AB, quam parallelogrammum BT, eidem parallelogrammo BH, super eandem basin BI, aequale est, erit quoque quadratum BE, parallelogrammo BT, aequale. Sic etiam quia tam quadratum CD, parallelogrammo CH, super eandem basin AC, quam parallelogrammum CT, eidem parallelogrammo CH, super eandem basin *CK*, aequale est, erit quoque quadratum CD, parallelogrammo CT, aequale. Totum ergo quadratum BCKI, ex duobus parallelogrammis BT, CT, compositum, duobus quadratis BE, CD, aequale est. Quod erat demonstrandum.

Aliter. Loco rectae HTAL, iungantur duae rectae AI, AK, et per A, ipsis BI, CK, parallela ducatur TAL. Quoniam ergo tam quadratum BE, (ostendemus enim vt prius, BK, BE, CD, quadrata esse laterum BC, AB, AC.) trianguli ABI, super eandem basin AB, quam parallelogrammum BT, eiusdem trian-

trianguli ABI, ſuper eandem baſin BI, duplum eſt, erit quadratum BE, parallelogrammo BT, aequale. Pari ratione, quia tam quadratum CD, trianguli ACK, ſuper eandem baſin AC, quam parallelogrammum CT, eiusdem trianguli ACK, ſuper eandem baſin CK, duplum eſt, erit quoque quadratum CD, parallelogrammo CT, aequale. Quam ob rem, vt prius, totum quadratum BCKI, ex parallelogrammis duobus BT, CT, conflatum, duobus quadratis BE, CD, aequale eſt. Quod erat oſtendendum.

Aliter. Loco rectarum HTAL, AI, AK, ducantur per F, G, ipſis BC, IK, parallelae FM, GP, ſecantes AB, CK in N, O, et BI, CE, in R, S. Eritque BR, ipſi KO, aequalis. Quoniam enim anguli O, R, recti ſunt, et OKF, RBG, aequales, quod vterque angulo ABC, ſupra oſtenſus ſit aequalis; erunt duo anguli O, K, trianguli FKO, duobus angulis R, B, trianguli GBR, aequales, vterque vtrique: Sunt autem et latera FK, BG, illis adiacentia aequalia, quod vtrumque ſupra ſit oſtenſum ipſi BC, aequale. Igitur et latera KO, BR, aequalia erunt. Itaque quoniam tam parallelogramma BCFN, BCOM, ſuper eandem baſin BC, quam parallelogramma BCSG, BCPR, ſuper eandem baſin BC, aequalia ſunt, eſtque parallelogrammum BCPR, parallelogrammo IKOM, aequale, ob rectas BR, KO, oſtenſas aequales; (nam hinc fit, vt ſi vnum alteri ſuperponatur, ſibi mutuo congruant, propter laterum, angulorumque aequalitatem) erunt

ambo

ambo parallelogramma BCFN, BCSG, toti quadrato BCKI, ex duobus parallelogrammis BCOM, IKOM composito aequalia. Cum ergo tam quadratum CD parallelogrammo BCFN, super eandem basin CF, quam quadratum BE, parallelogrammo BCSG, super eandem basin BE, parallelogrammo BCSG, super quadrata CD, BE, eidem quadrato BCKI, aequalia. Quod demonstrandum erat.

Atque in hunc modum aliae demonstrationes excogitari poterunt. Video demonstrationem Euclidis simpliciorem esse, et magis expeditam, sed non iniucundum tamen est intelligere, variis demonstrationibus eandem veritatem posse confirmari.

Dreizehnter Brief.

Fortsetzung der Anmerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen des ersten Buchs der Elemente des Euclides.

Außer den Vergleichungen zwischen Euclids Elementen und des Hrn. Hof. Kästners Lehrbuche könnte ich noch verschiedene andere anstellen; um aber nicht zu weitläuftig zu werden, muß ich einen großen Theil davon übergehen, und was die übri-

gen

gen betrifft, so wird mich das Folgende darauf zurückführen. Ich mache also jetzt den Anfang, Ihnen die versprochene Anleitung zur Anwendung der allgemeinen Sätze des Euclides auf weniger allgemeine Fälle, und zur Erweiterung der von ihm mitgetheilten Elementarkenntnisse zu geben.

Ein Theil der in dieser Rücksicht zu machenden Anmerkungen wird die kürzern Arten, die Aufgaben aufzulösen betreffen, zu denen man entweder durch das Folgende in den Stand gesetzt wird, oder wobei man es bewenden lassen kann, wenn man bloß die Absicht hat, einer Aufgabe ein Genüge zu thun, und nicht auch zugleich, die Richtigkeit ihrer Auflösung vor Augen zu legen. Ein anderer Theil wird insbesondere die Lehrsätze zum Gegenstande haben, und zur Vergrößerung der Fertigkeit, von ihnen im vorkommenden Falle einen geschickten Gebrauch zu machen beizutragen dienen.

Ich fange von der ersten Aufgabe an. Hat man bloß die Absicht, über einer gegebenen geraden Linie ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben: so ists nicht nöthig, die beiden mit ihr aus ihren Endpunkten zu beschreibenden Kreise ganz darzustellen, sondern es ist genug, wenn man von ihnen nur zwei Bogen, die sich schneiden, beschreibt. In diesem Falle ist die Absicht eingeschränkter, die man sich vorsetzt, man kann daher, ja man muß auch die Mittel ihrer Erreichung verkürzen oder vereinfachen. Je kleiner man ferner dabei die Bogen zu

neh-

nehmen im Stande ist, desto besser ist es, und dazu hilft, daß man den ersten Bogen nach dem Augenmaße über der Mitte der gegebenen Linie zu beschreiben sucht. Bei dem Abschneiden eines einer gegebenen geraden Linie gleichen Stücks von einer andern geraden Linie ist bei einer ähnlichen Einschränkung seiner Absicht dasselbe Verkürzungsmittel möglich und nützlich.

Die vier Aufgaben, welche Sie in dem neunten bis zwölften Satze des Euclides finden, lassen ebenfalls manche Verkürzungen, ja selbst einige erleichternde Veränderungen in ihrer Auflösung zu. Es ist z. B. bei der im neunten Satze nicht *nöthig* DE wirklich zu ziehen, und noch weniger braucht man über DE das gleichseitige Dreieck DEF wirklich und vollständig zu beschreiben. Hat man die Punkte D und E durch kleine Bogen bemerkt, so kann man aus ihnen mit jedem Halbmesser, der mehr beträgt, als die Hälfte der Linie DE zwei in F sich schneidende Bogen beschreiben, und darauf die Linie AF ziehen. Wenn der zu theilende Winkel nicht gar zu stumpf ist, so kann man zu dem zuletzt gedachten Halbmesser eben den behalten, mit welchem man von AB und AC die gleichen Stücke AD und AE abgeschnitten hat, und ist solcher nicht bequem genug, einen etwas größern annehmen, wenn man die sich schneidenden Bogen unter DE jenseits A, und etwas kleiner, wenn der gegebene Winkel nicht sehr stumpf, oder spitzig, ist, und es etwa der Raum nothwendig machen sollte, die in F sich schnei-

schneidenden Bogen über DE zwischen ihr und A, so wie Fig. 17 zu beschreiben.

Die Aufgabe im zehnten Satze wird ebenfalls aufgelöset, wenn man über und unter der gegebenen Linie mit einem Halbmesser, welcher größer ist als die Hälfte der gegebenen Linie, zwei Paar sich schneidende Bogen beschreibt, und ihre Schneidungspunkte durch eine gerade Linie verknüpfet.

Daß man aber den gedachten Halbmesser größer als die Hälfte der gegebenen Linie annehmen muß, davon ist der Grund nicht eher als nach dem zwanzigsten Satze deutlich, und Sie sehen daher, warum Euclides noch immer bloß gleichseitige Dreiecke beschreiben läßt. Wie aber, wenn Euclides die Auflösung dieser Aufgabe auf diese Art ausgedruckt hätte: Man beschreibe über der gegebenen Linie auf beiden Seiten ein gleichseitiges Dreieck, und ziehe zwischen den Spitzen derselben eine gerade Linie? Dadurch wäre in der Kürze des Ausdrucks zwar etwas, in Ansehung der Auflösung selbst aber nichts gewonnen, und was den Beweis betrifft, so wäre nun ein noch einmal so weitläuftiger nöthig. Denn an Statt, daß die Richtigkeit der Euclideischen Auflösung darzuthun die Vergleichung zweier Dreiecke hinlänglich ist, müßte man zwei Paar Dreiecke untet einander vergleichen, und nach Fig. 18 den Beweis so führen. Es ist

$\triangle$ ACD = $\triangle$ BCD, weil
AC = BC } als Seiten von gleich-
AD = BD } seitigen Dreiecken
und CD = CD. Folglich auch
ACD = BCD. Nun ist ferner
$\triangle$ ACE = $\triangle$ BCE weil
AC = BC, wie vorhin
CE = CE
ACE = BCE, nach dem Vorherge-
henden. Also
AE = BE. W. z. E.

Bei der Aufgabe im eilften Satze kann man es ebenfalls, wenn man bloß die Auflösung der Aufgabe und nicht zugleich den Beweis derselben zur Absicht hat, bei der Beschreibung zweier sich schneidenden Bogen bewenden lassen, so wie man im ähnlichen Falle bei der im zwölften Satze auch nicht nöthig hat, den ganzen Zirkel zu beschreiben. Wenn bei der Aufgabe im eilften Satze der gegebene Punkt der Endpunkt der gegebenen geraden Linie ist, so muß man diese Linie, ehe man Euclids Vorschrift befolgt, verlängern. Ist aber der Punkt, aus welchem die senkrechte Linie aufgerichtet werden soll, nicht bestimmt, so darf man einen willkührlich annehmen. In beiden Fällen lassen sich aber auch noch andere Auflösungen finden. Denn im ersten kann man, wenn z. B. Fig. 19, aus A der Linie AB eine senkrechte Linie aufgerichtet werden soll, zwischen A und B einen Punkt C annehmen, aus diesem eine senkrechte Linie aufrichten, von derselben

CE

CE = CA abschneiden, den Winkel ACE in zwei gleiche Theile theilen, aus E eine auf CD senkrechte Linie aufrichten, und endlich den Punkt, wo diese die CF trift, mit dem Punkte A durch eine gerade Linie verbinden. Denn da hier

$\triangle$ AGC = $\triangle$ EGC, weil
AG = CE wegen der Construction
CG = CG und
ACG = ECG, ebenfalls wegen der Construction:
so ist GAC = GEC. und da
GEC = R auch
GAC = R. und also die Linie GA senkrecht auf AB.

Diese Auflösung theilt Clavius in der schon öfters angeführten Edition bei der Erläuterung des eilften Satzes mit; sie setzt indeß voraus, daß die aus E in CD *auf die* CD *aufgerichtete* senkrechte Linie die CF schneiden werde. Ist Euclides eilfter Grundsatz da wo er steht, oder vor allen Sätzen, bereits erläutert und dargethan worden, so kann die gedachte Auflösung an dem gegenwärtigen Orte allerdings schon gegeben werden; indeß hätte es doch Clavius mit bemerken sollen, daß die beschriebene Schneidung allezeit erfolgen müsse. Die Lehre vom Zirkel giebt noch eine andere Auflösung an die Hand, welche aber nicht hieher gehört. Im andern Falle, d. h. wenn der Punkt, aus welchem die senkrechte Linie aufgerichtet werden soll, unserer Willkühr

lassen worden ist, kann man auch aus zweien in der Linie AB Fig. 20. willkührlich genommenen Punkten C und D zwei Paar sich schneidende Bogen mit einem beliebigen Halbmesser beschreiben, und die Schneidungspunkte durch eine gerade Linie verbinden. Fig. 20 kann dabei CE = ED = DF = FC, oder auch CE = ED und CF = FD, desgleichen CE = CF. und ED = DF, in Fig. 21 aber muß CE = ED und CF = FD seyn; das Uebrige werden sie hoffentlich von selbst einsehen.

Daß man bei der Aufgabe des zwölften Satzes aus den Punkten E und G mit einem willkührlichen Halbmesser, wofern derselbe nur größer *ist als die* Hälfte von EG zwei sich schneidende Bogeu beschreiben, und ihren Schneidungspunkt mit C durch eine gerade Linie verknüpfen könne, ist aus dem Vorhergehenden leicht einzusehen. Es läßt sich aber die Auflösung dieser Aufgabe auch sonst noch auf mancherlei Art verändern. Man kann z. B. wie Fig. 22 und 23 aus zweien in der Linie AB willkührlich angenommenen Punkten D und E mit den Halbmessern DC und EC zwei sich bei F schneidende Bogen beschreiben, und die Linie CF ziehen. Denn da hier

△ DCE = △ DFE
DC = DF } wegen der Con-
CE = FE } struction
und DE = DE; so ist auch
CDG = FDG. Nun ist aber auch ferner
△ DCG = △ DFG, weil

DC

DC = DF, wie vorhin
DG = DG und
CDG = FDG, wegen des Vorhergehenden. Es ist
daher CGD = FGD = R, und also
CG senkrecht auf AB.

Wie ist man aber im Stande, dergleichen Veränderungen selbst zu finden? Die Antwort hierauf ist: Einmal stelle man sich die besondern Umstände, unter welchen eine Aufgabe vorkommen kann, deutlich vor, und überlege, was *man darnach in der allgemeinen* Auflösung für Veränderungen vornehmen könne. Hierbei muß man, um von dem Allgemeinen anzufangen, bald entdecken, daß es sehr oft bloß um die Auflösung der Aufgaben, z. B. bloß um die Beschreibung eines gleichseitigen Dreiecks über einer gegebenen geraden Linie, oder bloß um die *Theilung* eines geradlinigen *Winkels*, oder einer *geraden Linie* u. s. w. *zu thun seyn* könne; und frägt man sich nun, wie *man in einem* solchen Falle zu verfahren habe: so lehrt eine mäßige Ueberlegung solche Abkürzungen finden, als wir bereits mehrere gehabt haben, und welche sich insgesammt darauf zurückführen lassen, daß man alle die Linien, es mögen nun Zirkel oder gerade Linien seyn, die zum Beweise der Richtigkeit der Auflösung gehören, nicht wirklich beschreibt, sondern nur, jene durch Bogen, und diese durch ihre Endpunkte, andeutet. Ferner nimmt man bei der Befolgung der gegebenen Regel ebenfalls bald wahr,

 daß

daß bei der Aufgabe des eilften Satzes der Punkt C entweder zwischen A und B fallen, oder auch einer von diesen Punkten selbst seyn, und daß, wenn dies letztere Statt findet, die gegebene Linie da, wo sie gegeben worden ist, entweder bequem verlängert werden könne oder nicht. Bloß für den allerletzten dieser Fälle braucht die gegebene Auflösung verändert zu werden; aber aufrichtig zu gestehen, so bietet sich die oben mitgetheilte Art, welche eigentlich dem Proclus gehört, nicht leicht dar; und da sie überdies nicht die bequemste ist, so ist es hier auch wohl besser, sich diesen Fall zu merken, bis sich zu zu einer bequemen Auflösung desselben Gelegenheit zeigt. Bei der Aufgabe des zwölften Satzes hält es ebenfalls nicht schwer zu entdecken, daß der Punkt C öfters die Lage haben kann, daß die Schneidung der gegebenen geraden Linie in zweien Punkten durch einen mit seiner Entfernung von einem jenseit der Linie willkührlich angenommenen Punkte aus ihm beschriebenen Zirkel nicht bequem zu erhalten sey. Ueberlegt man aber alsdann, daß Fig. 22 und 23 CGA ebenfalls = R werde, und also CG auf AB senkrecht sey, wenn CGA = AGF und frägt sich, wie man dies erhalten könne: so sieht man, wenn man die ganze Aufgabe als bereits aufgelöset nimmt, daß CDF ein gleichschenkliges Dreieck und der Winkel D durch die DE in zwei gleiche Theile getheilt seyn müsse. Da man nun D und E in der Linie AB annehmen muß, darin aber sie willkührlich annehmen kann, so fällt in die Augen, daß man den Punkt F finden werde, wenn man aus D und E mit

mit DC und EC zwei auf der andern Seite von AB sich schneidende Bogen beschreibt. Die Art, wie wir uns hier geholfen haben, um die oben für diesen Fall mitgetheilte Auflösung zu finden, und welche darin besteht, daß man das Gesuchte als bereits gefunden betrachtet, und nun untersucht, wie es mit bekannten Dingen zusammenhange, und daraus wirklich gefunden werden könne; ist zur Erfindung der Auflösungen außerordentlich nützlich, und Sie können sie sich daher zum künftigen Gebrauche merken. Zum andern muß man jede Aufgabe, nachdem man mehrere auf sie folgende Lehrsätze sich bekannt gemacht hat, wenn man darunter welche findet, welche auf ihre Auflösung einen Einfluß haben können, vom Neuen überdenken. Das sieht man z. B. bei den Aufgaben im neunten bis eilften Satze des Euclides bald, daß man zu ihrer Auflösung nicht eben ein gleichseitiges Dreieck nöthig habe, sondern daß auch ein gleichschenkliges hinlänglich sey; und daß jenes nur deswegen genommen werde, weil die Beschreibung desselben in allen Fällen möglich ist. Aber nach dem zwei und zwanzigsten Satze lassen sich die Umstände bestimmen, unter welchen die Beschreibung eines gleichschenkligen Dreiecks allezeit möglich seyn muß; und kehrt man daher nach diesem Satze zu jenen Aufgaben zurück, so läßt sich ihre Auflösung allerdings für die Praxis leichter einrichten, und zugleich fällt das Wie? sehr bald in die Augen. Endlich muß man sich bei den gegebenen Auflösungen angewöhnen, sich nicht damit zu begnügen, daß man eine richtige

Auflösung gefunden, sondern darauf auch untersuchen, ob sie den möglich höchsten Grad der Leichtigkeit habe; und wenn das nicht ist, ihr solchen entweder sogleich, oder doch sobald als möglich zu geben suchen.

Nach diesen Regeln findet man nun die praktischen Abkürzungen, welche man bei der Aufgabe im zwei und zwanzigsten Satze des Euclides anbringen kann, sehr leicht. Sie bestehen darin, daß man über FG = B aus F mit A, und aus G mit C zwei sich schneidende Bogen beschreibt, und KF und KG zieht, ohne zuvor FG nach beiden Seiten zu verlängern, und ohne die Zirkel, welche die Figur bei diesem Satze darstellt, ganz zu beschreiben. Bei der Aufgabe des drei und zwanzigsten Satzes aber wird man es bald bequemer finden, EC = CD, als D und E willkührlich, und folglich CE und CD ungleich zu nehmen. Daß man die Linie ED nicht wirlich zu ziehen brauche, und was sich sonst noch für Abkürzungen machen lassen, das habe ich nicht nöthig auch hier zu erinnern, so wie ich es von jetzt auch künftig bei allen ähnlichen Fällen als bekannt annehmen werde.

Die Aufgabe im ein und dreißigsten Satze des Euclides läßt sich nach dem so eben Angeführten auf die Art auflösen, daß man Fig. 24 aus D die Punkte E und F in gleicher Entfernung von D, und mit eben der Entfernung aus A den Punkt G bemerkt und den Bogen HI beschreibt, und diesen durch einen

andern

andern aus G mit der Entfernung der Punkte E und F beschriebenen Bogen in K schneidet. Die Linie AK ist die gesuchte Parallele. In der Folge werden sich noch einige andere praktische Verfahrungsarten bemerken lassen.

Die Aufgabe im fünf und vierzigsten Satze wird desto weitläuftiger und beschwerlicher, je mehr Seiten die zu verwandelnde geradlinige Figur hat, und man hat daher hier auf Abkürzungsmittel zu denken. Nun giebt der Lehrsatz im acht und dreißigsten Satze des Euclides ein sehr leichtes Mittel an die Hand, ein Dreieck in ein anders, und dadurch auch, ein Viereck in ein Dreieck zu verwandeln. Betrachten Sie unsere fünf und zwanzigste Figur. Wenn in dem Vierecke ABCD die Diagonale AC gezogen, die Grundlinie DC nach E verlängert, durch B die punktirte Linie BF mit AC parallel gelegt, und AF gezogen wird: so ist $\triangle$ AFC = $\triangle$ ABC wegen des angeführten acht und dreißigsten Satzes, und folglich auch $\triangle$ AFD = ABCD. Hat man nun eine mehrseitige Figur, so kann man, nachdem man dieselbe durch Diagonalen in lauter Dreiecke getheilt hat, anfänglich zwei davon in eins verwandeln, dann dieses mit dem nächst angrenzenden eben so behandeln, und auf diese Art fortgehen, bis man die ganze Figur in Ein Dreieck verwandelt hat. Dabei kann man öfters die Ziehung der Linien wie AF ersparen, und sich auch sonst noch einige Vortheile machen, die ich Ihnen aber an einer besondern Figur erklären muß. Es sey also Fig. 26 das Sechs-

eck ABCDEF gegeben. Verlängern Sie die Grundlinie ED zu beiden Seiten nach M und N, und ziehen Sie aus einer der gegenüberstehenden Winkelspitzen z. B. A die Diagonalen AE, AD, AC. Ist dies geschehen, so verlängern Sie ferner alle Grundlinien der durch die Diagonalen entstandenen Dreiecke bis auf die Grundlinie des äußersten Dreiecks auf jeder Seite, und ziehen nun durch B die Linie BG mit AC, und durch G die Linie GH mit AD parallel, und nun die Linie AH. Ferner legen Sie auf der andern Seite durch F die FI mit der AE parallel, und ziehen Sie AI. Alsdann ist das Dreieck AIH dem Sechsecke ABCDEF gleich, und auf eine ähnliche Art lassen sich *alle geradlinige* Vielecke in Ein Dreieck verwandeln. Wie man nun weiter gehe, und dieses Dreieck in jedes beliebige Parallelogramm verwandele? dabei habe ich nicht nöthig zu verweilen, so wie Sie auch den Beweis, daß das Dreieck AIH dem Sechsecke ABCDEF gleich sey, leicht von selbst führen werden.

Hier muß ich noch einiger andern Erweiterungen der bisher betrachteten Aufgaben gedenken, davon man die beiden ersten durch eine öftere Anwendung der Elementaraufgaben erhält. Man kann, nach der Aufgabe im neunten Satze des Euclides, einen geradlinigen Winkel, und, nach der im zehnten Satze, eine gegebene gerade Linie in zwei Theile theilen. Hat man dieses gethan, so kann man mit den erhaltenen Theilen eben so verfahren, als vorher

her mit dem Ganzen, und eben dieselbe Operation ferner mit den jetzt erhaltenen Theilen vornehmen, und so immer weiter fortgehen. So theilt man nach und nach einen gegebenen geradlinigen Winkel oder eine gerade Linie in vier, in acht, in sechszehn gleiche Theile, u. s. w. Der Hr. Hofr. Kästner bemerkt dies bei diesen beiden Aufgaben S. 183, 184 in den Zusätzen.

Die Aufgabe des zwei und zwanzigsten Satzes führt, wenn man zwei von den gegebenen Seiten einander gleich nimmt, auf die: Aus zwei gegebenen geraden Linien ein gleichschenkliges Dreieck zu machen, wenn diejenge, welcher die Schenkel gleich werden sollen, größer ist als die Hälfte der andern; und wenn man man alle drei Seiten gleich setzt, so fällt diese Aufgabe mit der allerersten zusammen.

Nach dem fünf und vierzigsten Satze kommt man, wie Br. 12. S. 118. bemerkt worden ist, zu der Untersuchung des Quadrats, des Rechtecks, des Rhombus und des Rhomboides. Da Euclides sich in dem ersten Buche seiner Elemente bloß mit der Untersuchung der Quadrate beschäftiget, so lehrt er im sechs und vierzigsten Satze auch ihre Construction allein, mit Weglassung der übrigen. Man kann hier die Frage aufwerfen, wie die übrigen von den genannten Figuren gezeichnet werden können? Die Construction dieser Figuren setzt aber einige weitere Entwickelungen der anfänglich von ihnen gegebenen Erklärungen, nach den

Sätzen,

Sätzen, die von den Parallelogrammen erwiesen worden sind, voraus, auf welche ich nachher kommen werde. Da Euclides Elemente schrieb, so gehörte diese Entwickelung, und also auch die Anweisung zu den gedachten Constructionen nicht in sein Buch; der Hr. Hofr. Kästner aber that Recht daran, daß er sie S. 197 Zusatz 8 lehrte.

Der Pythagorische Lehrsatz endlich führt unmittelbar auf die Aufgabe: Zwei Quadrate in Eins zu verwandeln. Sobald man die Art und Weise hiervon kennt, so kann man auch ein Quadrat machen, welches drei, vier und mehrern Quadraten gleich ist. Das kürzeste Verfahren hierbei ist, daß man einen rechten Winkel MAN Fig. 28 construirt, auf den Schenkeln desselben AB und AC den Seiten der beiden ersten Quadrate gleich nimmt, und CB in AD trägt; dann AE der Seite des dritten Quadrats gleich macht, und ED zieht, welches die Seite des Quadrats ist, das so groß ist, als die drei gegebenen zusammen genommen. Sind vier Quadrate oder noch mehrere gegeben, so fährt man auf eben die Art weiter fort. Sind die gegebenen Quadrate einander gleich, so kann man sich eben dieses Mittels bedienen, nur bleibt alsdann die Linie AC beständig. Ein Quadrat indeß zu machen, welches vier, neun, sechzehnmal u. s. w. so groß sey, als ein gegebenes, darf man nur die Seiten des gegebenen doppelt, drei, viermal u. s. w. so groß machen als die Seite des gegebenen.

Vier-

Vierzehnter Brief.

Fortsetzung der Anmerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen des ersten Buchs der Elemente des Euclides.

So wie wir den Pythagorischen Lehrsatz gebraucht haben, um darauf die Aufgabe von der Verwandlung zweier uud mehrerer Quadrate in Eins zu bauen: so lassen sich auch viele andere Lehrsätze gebrauchen, insbesondere alsdann, wenn man sie zuvor durch die Anwendung auf weniger allgemeine Fälle entwickelt hat. So wenig aber Euclides die gedachte Aufgabe, eben deswegen, weil sie nach dem Lehrsatze, worauf sie sich gründet, so leicht zu finden ist, zum Gegenstande eines besondern Satzes gemacht hat: so wenig darf man auch die übrigen Aufgaben besonders in seinen Elementen zu finden erwarten; aber Pflicht ist es, wenn man diese Elemente recht und mit allem daher möglichen Nutzen gebrauchen will, sie aufzusuchen, und zu dem Ende auch jene Entwickelung seiner Lehrsätze vorzunehmen. Und hierzu will ich Ihnen nunmehr ebenfalls einige Anleitung zu geben suchen.

Wenn man den Lehrsatz des vierten Euclideischen Satzes aufmerksam bedenkt, so ist das erste, was man dabei wahrnimmt, das, was der Hr. Hofr. Kästner im ersten Zusatze S. 180 bemerkt,

nem=

lich, daß zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel ein Dreieck bestimmen, und daß sich also aus diesen Stücken nicht mehr als ein Dreieck machen lasse. Frägt man sich aber: Wie aus zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ein Dreieck gemacht werden könne? so nimmt man eben so bald wahr, daß man an dem gegenwärtigen Orte noch nicht im Stande sey, diese Aufgabe unter jeden Umständen aufzulösen; und hat also einen Gegenstand, auf welchen man in der Folge zurückzukommen suchen muß. Denkt man ferner über die bei diesem Lehrsatze möglichen besondern Fälle nach, so kommt man darauf, daß AB = AC, und DE = DF also AB = AC = DE = DF seyn könne; und wendet man nun den achten Grundsatz gehörig an, so gelangt man zu dem zweiten Zusatze des Hrn. Hofr. Kästners S. 180, und durch denselben bei hinlänglich fortgesetzter Aufmerksamkeit in der Betrachtung desselben auch zu dem dritten Zusatze S. 180, 181, und also zu einem von dem Euclideischen verschiedenen Beweise des Satzes: In jedem gleichschenklichen Dreiecke sind die Winkel über der Grundlinie gleich. Kehrt man zu diesem Satze nach Euclids dreizehnten Satze zurück, so läßt sich durch die Verbindung beider, und durch das dritte Axiom auch der Satz finden, daß in jedem gleichschenklichen Dreiecke, dessen Schenkel verlängert worden, die Winkel unter der Grundlinie gleich sind; und kann man also diesen Satz bis nach dem dreizehnten Satze des Euclides entbehren, so kann man auch, wenn man will, den dar-

über

über vom Euclides gegebenen Beweis aus der Acht lassen.

Hier haben Sie eine ausführliche Probe davon, wie man öfters durch die Entwickelung der Euclideischen Elemente alles dasjenige finden könne, was in den neuern Lehrbüchern der Geometrie mehr enthalten ist, und es wird Ihnen hoffentlich der Mühe werth scheinen, diese Betrachtung weiter fortzusetzen.

Wir wollen also den Lehrsatz im fünften Satze des Euclides untersuchen. In der Verbindung, in welcher wir diesen Lehrsatz fanden (Br. 2. S. 25.) war das Dreieck, welches uns darauf führte, ein gleichseitiges; wir betrachteten aber dabei nur die Gleichheit zweier Seiten, und dies war die Ursache, warum wir die gefundene Behauptung bloß auf die gleichschenkligen Dreiecke einschränken mußten. So wie sich aber zeigen läßt, daß in einem gleichseitigen Dreiecke zwei Winkel über der Einen Seite gleich sind, eben so läßt sich solches von jedem Paar Winkel über jeder andern Seite darthun, und also folgern, daß in einem gleichseitigen Dreiecke alle drei Winkel gleich sind. Dies ist die erste Hälfte des dritten Zusatzes in des Hrn. Hofr. Kästners Lehrbuche, S. 181, auf welche man also ebenfalls bei einer fortgesetzten Untersuchung der Euclideischen Elemente kommt. Die andere Hälfte dieses Zusatzes findet man, wenn man Euclides sechsten Satz auf eine ähnliche Art behandelt, oder untersucht, was dar-

daraus für ein gleichwinkliges Dreieck folge? und nun bietet sich des Hrn. Hofr. Kästners vierter Zusatz S. 182 sehr bald dar.

Bei Euclides siebenten und achten Satze könnte man die beiden Dreiecke auch gleichschenklig und gleichseitig annehmen; bleibt man aber bei Euclides Beweise, so führt dies auf nichts, was nicht bereits da gewesen wäre. Allein wenn man die gegebenen Dreiecke mit einer gleichen Seite aufeinander legt, so bemerkt man leicht, daß auch die übrigen Seiten auf einander fallen würden, wenn die Winkel über den auf einander gelegten Seiten, einzeln genommen, einander gleich wären; und überläßt man sich der Betrachtung dieses Falls, so entdeckt man den Lehrsatz des dritten Satzes des Hrn. Hofrath Kästners mit seinem Beweise, und gelangt ferner durch die Betrachtung der hiebei möglichen besondern Fälle auch zu dem ersten und zweiten Zusatze desselben. Hieraus läßt sich aber der dritte und vierte Zusatz sehr leicht folgern, und da man also dieselben auch ohne Euclids fünften und sechsten Satz erhalten und darthun kann, und beide Sätze auf die im Vorhergehenden beschriebene Art mit dem vierten Satze des Euclides und dem dritten des Hrn. Hofr. Kästners verbunden werden können: so fällt hieraus der ganze Gang, den der Hr. Hofr. Kästner von S. 180 . 182 genommen hat, mit allen seinen Gründen in die Augen, und es darf derselbe, wenn eine Vergleichung angestellt werden soll, auf keine Weise dem Euclideischen nachgesetzt

wer-

werden, sondern beide sind in ihrer Art vollkommen, und der Gang des Hrn. Hofr. Kästners hat noch den Vorzug einer größern Kürze.

Auf diese Art aber haben wir noch keinen Beweis für den Lehrsatz des achten Satzes des Euclides. Hält man sich bei der Aufsuchung desselben an die vom Euclides mitgetheilten Grundsätze, so wird man schwerlich einen andern als den Euclideischen finden. Aber der ist, ausführlich geführt, sehr weitläuftig, und muß den Wunsch nach einem leichtern und kürzern erregen. Sucht man darnach, so wird man bald überzeugt, daß man, so lange man die gegebenen Dreiecke in Gedanken auf einander legt, vergeblich suchen werde, und so kann man leicht darauf verfallen, sie an einander in eine Ebene zu legen. Ist man aber erst dahin gekommen, so findet sich das übrige leicht. Uebrigens rührt dieser Beweis eigentlich vom Philo her, der um die 170ste Olympiade lebte, und man findet ihn beim Proclus im dritten Buch seiner schon öfters angeführten Commentarien S. 151 bis 154, so wie ihn auch Clavius in seiner Ausgabe des Euclides aus dem Proclus mitgetheilt hat.

Der erste Zusatz des Hrn. Hofr. Kästners, S. 182, wird auf eben die Art gefunden, als der erste, S. 180, und ein ähnlicher hätte auch S. 181 bei dem dritten Satze stehen können. Der zweite Zusatz S. 182 aber ergiebt sich bei einer nochmaligen

Ueberdenkung des zweiten, dritten und vierten Satzes zusammengenommen.

Von den nun folgenden Aufgaben ist bereits geredet worden:

Die Zusätze, welche der Hr. Hofr. Kästner, S. 185, 186, bei Euclides dreizehnten Satze hat, bedürfen nach dem Gesagten keine weitläuftigere Erklärung; zumal da der erste Zusatz Euclids vierzehnter, und der vierte Euclids funfzehnter Satz ist. Aber in dem Beweise des Satzes selbst unterscheidet sich der Hr. Hofrath Kästner merklich vom Euclides, und sein Beweis empfiehlt sich durch eine sehr große Kürze. Dies rührt daher, weil Euclides einmal den Gebrauch des Zeichens — sich nicht erlaubt hat, und zweitens einen elementarischen Beweis führen wollte, wobei man unmittelbar von den Datis oder von der Hypothesis ausgehen, und schrittweise zu der Thesis fortgehen muß.

Wenn man aus diesem Satze den herleitet: Von jeden zwei Nebenwinkeln ist jeder so groß als zwei rechte Winkel weniger dem andern Nebenwinkel; so erscheint der vierte Zusatz noch mehr in der Gestalt eines Zusatzes. Denn wenn man zwei Dinge mit einander vergleichen will, so versteht sich von selbst, daß man sich zuvor jedes derselben deutlich vorzustellen suchen müsse. Und thut man nun solches nach der angeführten Bestimmung bei den Vertikalwinkeln, so findet man, daß jede zwei Vertikal-

tikalwinkel gleich seyn müssen, weil jeder so groß ist, als zwei rechte, weniger einem und eben demselben beiden gemeinschaftlichen Nebenwinkel.

Aus Euclides sechzehntem Satze, welches der neunte bei dem Hrn. Hofr. Kästner ist, folgt der siebenzehnte so leicht, daß man ihn füglich als einen Zusatz von jenem behandeln kann, und dies hat auch der Hofr. Kästner, S. 186, Zus. 2, gethan. Die nun folgenden drei Zusätze sind nichts weiter als leichte Anwendungen des gedachten Lehrsatzes auf besondere Fälle; der sechste und die erste Hälfte des siebenten enthalten Euclides achtzehnten bis zwanzigsten Satz, und die andere Hälfte ist wieder bloß weitere Entwickelung der ersten Hälfte. Eben so leicht ist der achte Zusatz, S. 188, welcher eigentlich Euclids zwei und zwanzigsten Satz enthält. Der neunte Zusatz, S. 188, oder Euclids ein und zwanzigster Satz wird gefunden, wenn man die Figur des zwanzigsten Satzes zu verändern sucht, und den Punkt A in einer andern Lage betrachtet. Die übrigen S. 188 bis 190 stehenden Zusätze bieten sich dar, wenn man den vierten Zusatz, S. 187, nach dem sechsten und den folgenden vom neuen betrachtet. Auch kann man dieselben noch weiter fortführen, und zu folgenden Sätzen benutzen:

1. Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken zwei den rechten Winkel nicht einschließende Seiten gleich sind, so sind die ganzen Dreiecke gleich, weil sie sich decken. Denn wenn Fig. 29

$$AB = DE \text{ und}$$
$$AC = DF$$

ist, so fällt, wenn man DE auf AB legt, daß D auf A kommt, da B = E, auch EF auf BC. Sollte nun F nicht auf C, sondern entweder in G oder in H fallen, so wäre im ersten Falle $AG < AC$ und im andern $AH > AC$ da doch sowohl AG als $AH = DF = AC$ seyn sollten.

2. Wenn in zwei stumpfwinkligen Dreiecken die stumpfen Winkel, und zwei sie nicht einschließende Seiten gleich sind, so sind die ganzen Dreiecke gleich, weil sie sich decken. Denn wenn Fig. 30

$$B = E,$$
$$AB = DE,$$
$$AC = DF$$

ist, so fällt, wenn man DE wie vorhin auf AB legt, da B = E, auch EF auf BC. Sollte nun DF nicht auf AC, sondern entweder wie AG oder wie AH fallen, so wird im ersten Falle $AG < AC$, und im zweiten $AH > AC$ da doch wieder sowohl AG als $AH = DF = AC$ seyn sollten.

3. Wenn in zwei spitzwinkligen Dreiecken zwei Seiten und ein von ihnen nicht eingeschlossener Winkel gleich sind, und außerdem die dem gegebebenen Winkel gegenüberstehende Seite größer ist, als die anliegende, so sind beide Dreiecke gleich, weil sie sich decken. Denn wenn Fig. 31. wieder

B

$B = E$,
$AB = DE$ und
$AC = DF$

ist, so fällt, wenn man nochmals DE wie vorher auf AB legt, da $B = E$, EF auf BC. Fiele nun DF nicht auf AC, sondern wie AG oder AH, so wäre im ersten Falle $AG < AC$ und im zweiten $AH > AC$, und doch sollten beide $= DF = AC$ seyn.

Wäre nicht bei diesem dritten Satze $AC > AB$, und $DF > DE$ angenommen worden, so könnte $AG = AC$ seyn, und deswegen war dieser Zusatz nöthig. Ueberhaupt sind also zwei Dreiecke, worin ein Winkel und zwei diesen Winkel nicht einschließende Seiten gleich sind, einander gleich, so daß sie sich decken, wenn außerdem die Seite, welche dem gegebenen Winkel gegenübersteht, größer ist als die anliegende.

Auch läßt sich hier noch bemerken, daß man aus jedem Punkte C über einer geraden Linie AB Fig. 32, nicht mehr als zwei einander gleiche schiefe Linien nach AB ziehen kann, wobei leicht einzusehen ist, daß dieselben größer seyn müssen als die senkrechte Linie CD, und daß sie auf zwei verschiedene Seiten der CD fallen. Ferner, daß, wenn man aus einem solcher Punkte C eine schiefe Linie CG gezogen hat, jede zwei aus C gezogene einander gleiche aber kleinere Linien als CG auf einer Seite

der CG, jede zwei größere aber von eben der Art auf verschiedene Seiten der CG fallen müssen.

Ueber die Zusätze, welche der Hofr. Kästner beim eilften Satze S. 191 f. hat, habe ich nicht nöthig viel zu sagen. Der erste ist Euclids ein und dreißigster Satz, und der zweite bis sechste enthalten Betrachtungen, die Euclids eilften Grundsatz außer Zweifel setzen sollen. Da dieser Grundsatz noch nicht vom Hrn. Hofr. Kästner berührt war, und er gleichwohl zu den folgenden Sätzen nothwendig gebraucht wurde: so stehen die gedachten Betrachtungen am rechten Orte; und das *ist das* Einzige, was ich hier davon anzumerken habe.

Was die Zusätze S. 195 f. betrifft, so ergiebt sich der erste aus Euclids neun und zwanzigstem Satze durch die weitere Entwickelung desselben, aber auf eine andere Art. Denn sollte Fig. 33 außer AB noch eine andere Linie durch G z. B. IK der CD parallel seyn, so müßte nicht nur

$BGH + DGH = 2\,R$, sondern auch
$KGH + DGH = 2\,R$, und also
$BGH = KGH$ seyn, welches unmöglich ist. Die andere Hälfte dieses Zusatzes beruht auf folgenden Gründen: Wenn Fig. 34 die GH die AB, welche der CD parallel ist, in E schneidet, und man willkührlich EF zieht, so ist

$BEF + DFE = 2R$, aber
$HEF < BEF$, folglich
$HEF + DFE < 2R$, und es laufen also GH und CD, genugsam verlängert, auf der Seite dieser Winkel zusammen.

Der zweite Zusatz, S. 195, 196, ist Euclids neun und zwanzigster Satz, wobei ich Sie nur darauf aufmerksam mache, daß der Hr. Hofr. Kästner vorher zeigt, daß jede gerade Linie, die eine von zwei Parallelen schneidet, verlängert, auch die andere schneide. Eigentlich braucht man diesen Satz erst bei Euclids dreißigstem Satze, denn zum neun und zwanzigsten ist es genug, daß sich überhaupt gerade Linien denken lassen, die zwei Parallelen schneiden, und dergleichen erhält man immer, wenn man in jeder Parallele einen Punkt nach Belieben nimmt, und dadurch eine gerade Linie zieht.

Wenn man bei Euclids zwei und dreißigstem Satze einen Blick auf den Zusammenhang aller drei darin vorkommenden Dinge wirft, so findet man bald, daß er sich auf mancherlei Art verändern lasse. Versucht man nun andere Data anzunehmen, so kommt man auf des Hrn. Hofr. Kästners dritten und vierten Zusatz S. 196, und aus dem dritten ergiebt sich der fünfte, durch Annehmung eines besondern Falles.

Aus Euclids vier und dreißigstem Satze ergiebt sich bei einer fortgesetzten Betrachtung,

1. daß wenn ein Winkel eines Parallelogramms bekannt ist, alle übrigen gefunden werden können.

2. daß zwei Seiten, die einen Winkel einschließen, auch die übrigen Seiten geben.

3. daß ein Parallelogramm, in welchem ein Winkel ein rechter Winkel ist, lauter rechte Winkel habe.

4. daß es nur vier Arten von Parallelogrammen gebe, indem man sie theils in rechtwinklige und schiefwinklige, und jede dieser Arten wieder in gleichseitige und ungleichseitige theilen kann.

5. daß zur völligen Bestimmung

a. eines Parallelogramms überhaupt, ein Winkel und die beiden ihn einschließenden Seiten,

b. eines Quadrats, eine Seite,

c. eines Rechtecks, zwei Seiten,

d. eines Rhombus, eine Seite und ein Winkel,

e. eines Rhomboides zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel erfordert werden.

Und

Und nun, da dies bestimmt ist, läßt sich auch zeigen, wie man jedes Parallelogramm aus den genannten Stücken beschreiben kann, und eine Art davon finden Sie beim Hrn. Hofr. Kästner S. 197. Zusatz 8.

Bei Euclids drei und vierzigstem Satze kann man, wenn man sich in die Untersuchung der besondern Fälle einlassen will, AD = AB, und dann auch das Parallelogramm rechtwinklig nehmen. Jenes giebt die Raute, dieses das Quadrat, und bei einer genauen Betrachtung dieser beiden Fälle gelangt man zum eilften Zusatze des Hrn. Hofr. Kästners S. 198.

Ein jedes Vieleck läßt sich durch Diagonalen in so viel Dreiecke weniger zwei theilen, als es Seiten hat, und dann ist die Summe aller Winkel dieser Dreiecke der Summe aller Winkel des Vielecks gleich. Nimmt man innerhalb des Vielecks willkührlich einen Punkt an, und zieht daraus nach allen Ecken desselben gerade Linien, so erhält man so viel Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat, aber die Summe aller Winkel dieser Dreiecke ist um 4 R größer, als die Summe aller Winkel des Vielecks. In dem ordentlichen Vielecke sind alle Winkel unter einander gleich, und man kann daher aus der Summe aller auch einen jeden einzeln finden. Hierdurch ist man im Stande, aus Euclids zwei und dreißigstem Satze die Zusätze

 her-

herzuleiten' welche der Hr. Hofr. Kästner S. 202. f. hat.

Zum Schlusse dieses Briefes will ich noch einer Art und Weise gedenken, wie man den Euclideischen Beweis des Pythagorischen Lehrsatzes finden kann.

Das fällt dabei von selbst in die Augen daß ein jedes von den über den Catheten beschriebenen Quadraten einem Theile des Quadrats über der Hypothenuse gleich seyn müsse. Auch schon ehe man diese Theile bestimmt hat, kann man sich leicht davon überzeugen, daß hier an keine *unmittelbare* Vergleichung zu denken sey, und dies nöthigt *uns* Dinge aufzusuchen, womit sich die Quadrate der Catheten vergleichen lassen. Euclids ein und vierzigster Satz ist der einzige, der uns dazu verhelfen kann, und durch ihn werden wir zu den Hülfslinien FC nnd KB geleitet, und finden, daß $\frac{1}{2}$ AF = △ FBC, und $\frac{1}{2}$ AK = △ KBC. Anstatt dieser Dreiecke aber müssen wir andere ihnen gleiche Dinge zu erhalten suchen, um durch sie zu Theilen des Quadrats der Hypothenuse zu kommen. Betrachten wir nun dieselben aufmerksam, so zeigt sich bald, daß die Linien AD und AE zwei ihnen gleiche Dreiecke geben, und sind diese erst gefunden, so kann es fast nicht übersehen werden, daß eine aus A mit BD oder CE parallel gezogene gerade Linien AL das Quadrat der Hypothenuse in zwei Rectangel theile, welche von den zuletzt erhaltenen Dreiecken das Doppelte sind; und nun ist das übrige leicht.

Hier

Hier schließe ich diese Untersuchung über die Art und Weise, die allgemeinen Sätze des Euclides auf besondere Fälle anzuwenden, und dadurch die Elementarkenntnisse zu erweitern. Ich habe mich dabei innerhalb der Grenzen gehalten, daß ich Sie vorzüglich nur auf dasjenige geführt, was der Hr. Hofr. Kästner in seiner Geometrie hat, theils um nicht zu weitläuftig zu werden, theils weil dies hinlänglich seyn kann, um Sie in den Stand zu setzen, auf dem betretenen Wege, wenn es nöthig ist, weiter fortzugehen. Die Ausführlichkeit, die ich mir bey dem Bisherigen erlaubt habe, wird mich in den Stand setzen, künftig ähnliche Untersuchungen desto kürzer anstellen zu können, und aus diesem Grunde habe ich sie nicht für unzweckmäßig gehalten. In meinem nächsten Briefe will ich Ihnen noch einige Anmerkungen über die Folge, welche wir unter den Sätzen des ersten Buchs der Euclideischen Elemente finden mittheilen, und dann zu der Betrachtung der folgenden Bücher fortgehen.

Funfzehnter Brief.

Beschluß der Anmerkungen zu den Aufgaben und Lehrsätzen des ersten Buchs der Elemente des Euclides.

Die Vorstellung, welche wir uns von dem Wege, welchen Euclides bei seinen Elementen genom-

nommen, gemacht haben, hat uns bis jetzt in den Stand gesetzt, ihm Schritt für Schritt zu folgen, und wir kamen, dadurch geleitet, nicht nur zu allen den Aufgaben und Lehrsätzen, welche das erste Buch seiner Elemente ausmachen, sondern wir fanden sie auch in eben derselben Ordnung, und mit eben den Auflösungen und Beweisen. Dies ist ohnstreitig ein sicherer Beweis von der Richtigkeit der gedachten Vorstellung, und sie wird uns noch mehr einleuchten, wenn wir auch die folgenden Bücher nach eben dem Plane geordnet finden. Euclides hat also die Aufgaben und Lehrsätze so auf einander folgen lassen, wie sich dieselben aus den zum Grunde gelegten Erklärungen vermittelst der Forderungen und Grundsätze ergeben, wenn man dabei nach den Br. 3. S. 22 unten, und S. 23 mitgetheilten Grundregeln verfährt. Dabei hat er, weil er Elemente schrieb, die gefundenen Sätze nur allgemein mitgetheilt, ohne dieselben, wo es möglich war, auf besondere Fälle anzuwenden, und so die ihnen untergeordneten speciellen Sätze aus ihnen abzuleiten; und das theils deswegen, weil er nur die ersten Grundlehren der Geometrie vortragen wollte, theils weil die Anwendung des Allgemeinen auf besondere Fälle der Erklärung der Elemente vorbehalten, und von dem, der sich mit den Elementen hinlänglich bekannt gemacht, auch leicht selbst unternommen werden konnte. Eben diesen Gesichtspunkt muß man nun aber auch bei den Grundsätzen vor Augen behalten; und wenn wir nun auch da beim Euclides bloß das Allgemeine erwarten, und

die-

dieses Allgemeine, wo es nöthig ist, ins Besondere verwandeln, und das, was nach den allgemeinen Regeln des gründlichen Denkens daraus abgeleitet werden kann, zur gehörigen Zeit daraus ableiten: so hat man, wenn man an den eilften Grundsatz kommt, alles, was man gebraucht, um sich von der Wahrheit desselben auf dem von uns eingeschlagenen Wege zu überzeugen. Auf diese Art scheint mir meine Erläuterung des eilften Grundsatzes des Euclides dem Euclideischen Systeme am gemäßesten zu seyn, und dies ist der vorzüglichste Grund, warum ich sie allen andern vorgezogen habe.

Man kann sich also die Folge der Sätze des ersten Buchs der Euclideischen Elemente so vorstellen, daß

1. diejenigen Sätze stehen, worauf man durch die Betrachtung einer geraden Linie nach dem Br. 3. S. 22. 23 angeführten Regeln geführt wird, Satz 1 bis 12; daß darauf

2. die folgen, welche die Betrachtung des geradlinigen ebenen Winkels nach eben diesen Regeln an die Hand giebt, Satz 13 bis 15; ferner

3. diejenigen worauf man bei der Untersuchung der Dreiecke geräth, S. 16 bis 26,

4. die, welche sich bei der Untersuchung der Parallellinien ergeben, Satz 27 bis 48.

Alle

Alle diese Sätze betreffen entweder

1. gerade Linien, oder

2. geradlinige Winkel, oder

3. geradlinige Dreiecke, oder

4. Parallellinien, oder

5. Parallelogramme; aber sie stehen offenbar nicht in einer solchen Ordnung, daß zuerst alle die Sätze genommen worden wären, welche die geraden Linien, dann die, welche die geradlinigen Winkel u. s. f. betreffen, und konnten auch nicht auf diese Art auf einander folgen, wenn jeder Satz, da wo er steht, aus dem Vorhergehenden ganz verständlich seyn sollte. Freilich könnte es scheinen, daß man, wenn man diese Ordnung wählte, doch auch von dem Einfachen stufenweise zu dem Zusammengesetzten fortginge, und wirklich hat das manchen verleitet, diese Ordnung zu wählen: allein sie haben dabei nicht beobachtet, daß viele Sätze von einfachen Gegenständen zusammengesetzter sind, als manche von dem zusammengesetzten, und daß man bei der Anordnung der Sätze auf ihre Einfachheit oder Zusammensetzung und nicht auf die Einfachheit oder Zusammensetzung der Gegenstände, welche sie betreffen, sehen muß.

Die Ordnung, in welcher man eine Wissenschaft erlernt, ist nicht diejenige, in welcher man

von

von ihren Sätzen Gebrauch macht. Wenn man sich daher mit diesen so weit bekannt gemacht hat, daß man von ihrer Wahrheit überzeugt ist, so muß man nun auch darauf denken, sich dieselben in einer solchen Ordnung geläufig zu machen, daß man sich ihrer im vorkommenden Falle leicht erinnern kann. Wir brauchen nun die Sätze des ersten Buchs der Euclideischen Elemente, theils um die Gleichheit und Ungleichheit, bald gerader Linien, bald geradliniger Winkel, bald der Dreiecke zu beurtheilen, theils zu bestimmen, ob gerade Linien parallell sind oder nicht? u. s. w. Gut ist es daher, wenn man sich nach der Reihe die in dieser Rücksicht möglichen Fragen aufwirft, alle Antworten aufsucht, die darauf gegeben werden können, und diese seinem Gedächtnisse eingeprägt. Dergleichen Fragen sind mit ihren Antworten.

1. Wann sind zwei gerade Linien einander gleich?

a. Wenn sie sich decken.

b. Wenn beide einer und derselben dritten gleich sind.

c. Wenn sie Halbmesser eines Kreises sind.

d. Wenn sie in gleichen Dreiecken, die sich decken, gleichen Winkeln gegenüberstehen.

e. Wenn

e. Wenn sie in einem Dreiecke, das zwei gleiche Winkel hat, diesen gleichen Winkeln gegenüberstehen.

f. Wenn sie Seiten eines gleichwinkligen Dreiecks sind.

g. Wenn sie Parallelen zwischen Parallelen sind.

h. Wenn sie gegenüberstehende Seiten Eines Parallelogramms sind.

i. Wenn sie Seiten Eines oder gleicher Quadrate sind.

2. Wenn sind zwei geradlinige Winkel *einander* gleich?

a. Wenn sie sich decken;

b. Wenn beide einem und demselben dritten Winkel gleich sind.

c. Wenn sie rechte Winkel sind.

d. Wenn sie in gleichen Dreiecken, die sich decken, gleichen Seiten gegenüberstehen.

e. Wenn sie Winkel über der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sind.

f. Wenn

f. Wenn sie Winkel unter der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sind, dessen Schenkel verlängert worden.

g. Wenn sie Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind.

h. Wenn sie Vertikalwinkel sind.

i. Wenn sie bei zweien Parallelen, die von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, entweder

α. zwei Wechselwinkel, oder

β. der eine ein innerer und der andere ein äußerer ihm gegenüberstehender ist.

k. Wenn sie gegenüberstehende Winkel Eines Parallelogramms sind.

3. Wenn kann man von zwei Dreiecken behaupten, daß sie gleich sind, so daß sie sich decken?

a. Wenn darin zwei Seiten, und der Winkel, den diese Seiten einschließen, gleich sind.

b. Wenn alle Seiten des einen allen Seiten des andern, einzeln genommen, einander gleich sind.

c. Wenn die eine Seite und zwei Winkel des einen, der einen Seite und zweien auf eben die Art liegenden Winkeln des andern gleich sind.

d. Wenn darin zwei Seiten, und ein von denselben nicht eingeschlossener Winkel gleich sind, und dabei die gegebene Seite, welche dem gegebenen Winkel gegenübersteht, größer ist, als die anliegende. Woraus fließet

α. daß zwei rechtwinklige Dreiecke gleich sind, wenn die Hypothenuse und die eine Cathete des einen der Hypothenuse und der einen Cathete des andern gleich sind.

β. daß zwei stumpfwinklige Dreieckt gleich sind, wenn darin der stumpfe Winkel und irgend zwei Seiten einander gleich sind.

e. Wenn sie die Theile Eines Parallelogramms sind, welches durch die Diagonale getheilt worden.

4. Wenn

4. Wenn sind zwei gerade Linien ungleich?

a. Wenn die eine ein Theil der andern ist,

b. Wenn sie in Einem Dreiecke ungleichen Winkeln gegenüberstehen, und zwar ist diejenige die größere, welche dem größern, und die die kleinere, welche dem kleinern Winkel gegenübersteht.

c. Wenn sie die dritten Seiten von zwei Dreiecken sind, deren übrige Seiten gleich sind, aber ungleiche Winkel einschließen; und zwar ist diejenige die größere, welche die dritte Seite des Dreiecks ist, in welchem die übrigen Seiten den größern Winkel einschließen.

5. Wenn sind zwei geradlinige Winkel ungleich?

a. Wenn der eine ein Theil des andern ist.

b. Wenn der eine ein äußerer und der andere ein innerer gegenüberstehender Winkel eines Dreiecks ist, in welchem eine Seite verlängert worden; und zwar ist davon der äußere der größere.

c. Wenn sie in Einem Dreiecke zwei ungleichen Seiten gegenüberstehen, wo denn

allemal der der größere ist, welcher der größern Seite gegenübersteht.

d. Wenn der eine von zweien in einem Punkte innerhalb eines Dreiecks aus den beiden Endpunkten einer Seite desselben zusammen gezogenen Linien, und der andere von den beiden übrigen Seiten des Dreiecks eingeschlossen wird; und zwar ist jener der größere.

e. Wenn sie in zweien Dreiecken, worin zwei Seiten stückweise genommen einander gleich, die dritten Seiten aber ungleich sind, von den gleichen Seiten eingeschlossen werden; und zwar ist derjenige der größere, welcher sich in dem Dreiecke befindet, welches die größere dritte Seite hat.

6. Wenn sind zwei geradlinige Winkel zusammengenommen so groß als zwei rechte Winkel?

a. Wenn sie Nebenwinkel sind.

b. Wenn sie zwei an einer Seite liegende Winkel in einem Parallelogramm, oder bei zwei Parallellinien sind, die von einer dritten Linie geschnitten werden.

7. Wenn sind zwei gerade Linien zusammnegenommen größer als eine dritte?

Wenn sie mit dieser dritten die drei Seiten Eines Dreiecks ausmacht.

8. Wenn sind zwei geradlinige Winkel zusammengenommen kleiner als zwei rechte Winkel?

Wenn sie zwei Winkel Eines Dreiecks sind.

9. Wenn ist es unmöglich, daß zwei gerade Linien, die durch eine dritte verbunden sind, oder davon geschnitten werden, verlängert, auf der einen oder der andern Seite zusammenlaufen? Mit andern Worten: Wenn sind zwei gerade und durch eine dritte geschnittene gerade Linien parallel?

a. Wenn zwei Wechselwinkel gleich sind.

b. Wenn ein äußerer Winkel gleich ist dem innern ihm gegenüberstehenden.

c. Wenn zwei an einer Seite liegende Winkel zweien rechten Winkeln gleich sind.

10. Wenn kommen zwei gerade Linien verlängert endlich in einen Punkt zusammen?

a. Wenn, indem sie von einer dritten geschnitten werden, zwei innere auf einer Seite liegende Winkel zusammen kleiner sind, als zwei rechte Winkel.

b. Wenn in eben dem Falle die Wechselwinkel, oder

c. ein äußerer und der innere ihm gegenüberstehende Winkel ungleich sind.

11. Wenn sind zwei Parallelogramme einander gleich?

a. Wenn sie einerlei oder gleiche Grundlinien haben, und zwischen einerlei Parallelen liegen.

b. Wenn sie Ergänzungen von Parallelogrammen um der Diagonale sind

c. Wenn sie zwei Seiten und den von diesen eingeschlossenen Winkel gleich haben. Also

α. zwei Quadrate, wenn eine Seite,

β. zwei Rechtecke, wenn zwei Seiten,

γ. zwei Rhombi, wenn eine Seite und ein Winkel, und

δ. zwei

d. zwei Rhomboides, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel darin gleich sind.

12. Wenn sind zwei Dreiecke einander gleich, ohne sich zu decken?

a. Wenn sie einerlei oder gleiche Grundlinien haben, und zwischen einerlei Parallelen liegen.

b. Wenn sie die Theile von zwei durch Diagonalen getheilten Parallelogrammen sind, die einerlei oder gleiche Grundlinie haben, und zwischen einerlei Parallelen liegen.

13. Wenn sind zwei Quadrate Einem dritten gleich?

Wenn dieses dritte das Quadrat über der Hypothenuse, und sie die beiden Quadrate über den Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind.

Je geläufiger Sie Sich diese Fragen mit ihren Antworten machen werden, desto leichter wird es Ihnen werden, nicht nur geführte Beweise und gegebene Auflösungen zu fassen, sondern dergleichen selbst zu finden. Lassen Sie es daher Ihre Sorge seyn, dieselben Ihrem Gedächtnisse einzuprägen, so wie ich dahin sehen werde, daß Sie zu dem Gebrauche der-

selben bei dem Folgenden Anleitung erhalten. Es ist dies um so nothwendiger, da das bisher betrachtete erste Buch der Euclideischen Elemente die allerersten und folglich auch die nothwendigsten Anfangsgründe der ganzen Geometrie, und, so zu sagen, das A B C derselben enthält.

Und hier mögen nun die Betrachtungen des ersten Buchs der Euclideischen Elemente für jetzt aufhören. Bei den folgenden werde ich im Stande seyn, mich über vieles kürzer zu fassen, und in meinem nächsten Briefe werde ich den Anfang machen, Ihnen das zweite Buch des Euclides zu erklären.

Sechszehnter Brief.

Anmerkungen zu dem zweiten Buche der Elemente des Euclides.

Von den Sätzen, welche das zweite Buch der Euclideischen Elemente ausmachen, finden Sie in den neuern mathematischen Lehrbüchern sehr viele gar nicht, und die übrigen auf eine ganz andere Art behandelt. Wir wollen uns dadurch nicht abhalten lassen, auch bei diesem Buche etwas zu verweilen; und was kann es auch schaden, wenn man sich mehrere Wege zu Einem Ziele bekannt macht? Man setzt sich wenigstens dadurch in den Stand zu wählen. Da ich aber die Gegenstände dieses Buchs

bereits

bereits in dem ersten Stücke der vollständigern Fortsetzung meiner Versuche in sokratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie betrachtet habe, so werde ich es bei einigen allgemeinen Anmerkungen können bewenden lassen.

Zuvörderst wird Ihnen die Findung der Beweise nie Schwierigkeit machen, wenn Sie sich's zur Regel machen, jedesmal

1. die in den Sätzen benannten Größen zu construiren, und zwar auf die Art, daß Sie, wenn dabei mehrere in eine in die Augen fallende Verbindung gebracht werden können, solches wirklich thun. Dies geschieht z. B. bei dem dritten Satze, wenn Sie das Rectangel aus beiden Theilen nebst dem Quadrate des einen Theils in dem Rectangel aus der ganzen Linie und dem einen Theile derselben entwerfen.

2. die Data mit alle dem, was Sie daraus nach den Sätzen des ersten Buchs und überhaupt nach den vorhergehenden Sätzen herleiten können, sich deutlich und vollständig vorzustellen, und eben das mit den etwa angenommenen Sätzen oder Hypothesen zu thun.

3. im nöthigen Falle die entworfene Construction nach den allgemeinen Forderungen und vorher schon gehabten Aufgaben zu verändern, und darauf wieder die zweite Vorschrift zu beobachten.

4. aus den auf diese Art gefundenen Behauptungen diejenigen auszusuchen, die sich bloß an der anfänglich entworfenen Figur, und also ohne daß Sie nöthig haben, Sich dabei die Hülfslinien vorzustellen, deutlich denken und ausdrucken lassen.

Ich will dies an ein Paar Beispielen erläutern.

Nehmen Sie also zuvörderst den fünften Satz zur Hand. Die erste Regel giebt die dabei stehende Figur bis auf die Linien HM, welche eine Verlängerung KH ist, und die Linie BHE. Bleiben Sie dabei stehen, und wenden Sie die *zweite* Regel an; so ist

1. AL = DF, weil
AC = BF
AK = DB
CAK = DBF = R
2. CH = CH, und
3. LG = LG. Also
AL + CH + LG = DF + CH + LG,
oder AH + LG = CF.

Hier haben Sie also einen Beweis, dem man weder die Gründlichkeit noch die Kürze und Leichtigkeit absprechen kann, sobald man die Br. 14. S. 152 von den Parallelogrammen erwiesenen Sätze, und insbesondere S. 5, vor Augen hat. Allein diese Sätze ergeben sich aus den Euclideischen erst durch die nähere Entwickelung derselben, und man könnte also wider den geführten Beweis einwenden, daß er nicht völlig Euclideisch sey. Wenn jemand

jemand diesen Einwurf machen will, gut, so verlängern wir KH bis in M, wodurch

$$AL = CM$$

wird, weil diese beiden Parallelogramme gleiche Grundlinien haben, und zwischen einerlei Parallelen liegen. Dann ziehen wir EH und HB; und da LG und DM Quadrate sind, so wird

$EHL = LEH = \frac{1}{2} R$ desgleichen
$DHB = HBD = \frac{1}{2} R$, also
$EHL + DHB = R$; und
$EHL + LHD + DHB = 2 R$, folglich

EHB Eine gerade Linie, LG und DM Parallelogramme um der Diagonale, und CH und HF ihre Ergänzungen, also CH = HF. Es ist daher

$AL = CM$
$CH = HF$
$LG = LG$, also
$AL + CH + LG = CM + HF + LG$, oder
$AH + LG = CF$.

Ferner schlagen Sie den neunten Satz auf, und nehmen Sie dabei fürs erste die daselbst stehende Figur mit allen ihren Hülfslinien an. Ohne weiter geleitet zu werden, können Sie darin nach den vorhin ertheilten Vorschriften entdecken, daß

1. $CAE = AEC = CEB = EBC = \frac{1}{2} R$,
und folglich
2. $AEB = R$, und $AE = EB$. Ferner daß

3. DFB

3. DFB — DBF = $\frac{1}{2}$ R, GFE = GEF = $\frac{1}{2}$ R, und daher

4. DF = DB, und EG = GF = CD.

Da also die Dreiecke ACE, ECB, DFB, GEF insgesammt rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke sind, so ist ferner

5. AEq = 2 CEq = 2 ACq
6. EBq = 2 CEq = 2 CBq
7. FBq = 2 DFq = 2 DBq
8. EFq = 2 GEq = 2 GFq = 2 CDq und
9. ABq = 2 AEq = 2 EBq.

Aber alle diese Behauptungen geben noch keinen eigentlichen Satz. Um einen solchen zu finden müssen wir noch die Linie AF zu Hülfe nehmen, welche die Hypothenuse sowohl von dem rechtwinkligen Dreiecke AEF, als von dem gleichfalls rechtwinkligen Dreiecke AFD ist, und sich bei weiterm Nachsuchen bald darbietet. Es ist also

AFq = AEq + EFq, und
AFq = ADq + DFq, folglich
ADq + DFq = AEq + EFq, und da
DF = DB, und daher DFq = DBq, ferner
AEq = 2 ACq, und
EFq = 2 CDq ist, so ist auch
ADq + DBq = 2 ACq + 2 CDq

Wenn

Wenn Ihnen daher auch nicht der Satz, sondern bloß die Figur gegeben worden wäre, so würden Sie gleichwohl zu dem Gefundenen gekommen seyn, und also den Satz auch selbst entdeckt haben. Da der Satz gegeben seyn sollte, so hätten Sie durch Hinblickung auf das Ziel noch einige Verkürzungen anbringen können, auf die es aber hier so sehr nicht ankommt. Ueberlegen Sie aber hinterher nochmals den zu nehmenden Gang, so bietet sich folgende Ordnung dar. Es ist

$AFq = AEq + EFq$

$AFq = ADq + DEq$. also

$ADq + DFq = AEq + EFq$. Es ist aber

$DFq = DBq$, weil $DF = DB$, indem $DBF = DFB = \frac{1}{2} R$ ferner

$AEq = 2\, ACq$, weil $AC = CE$, und $ACE = R$, desgleichen

$EFq = 2\, CDq$, weil $CD = GF$, und $GF = GE$ indem $GEF = GFE = \frac{1}{2} R$ und $EGF = R$; folglich ist auch

$ADq + DBq = 2\, ACq + 2\, CDq$.

Aber wie findet man hier nun die Hülfslinien? Da hier Quadrate mit einander verglichen werden sollen, so ist es leicht zu muthmaßen, daß man hier den Pythagorischen Lehrsatz werde brauchen, und also rechtwinklige Dreiecke zu erhalten suchen müssen. Da überdies das doppelte Quadrat von AC in dem Satze vorkommt, so führt dies darauf, daß man $ACE = R$ nnd $CE = AC$ machen müsse, und nun ist alles was man weiter zu thun hat, daß man

AE

AE und EB zieht, ferner DF parallel CE, GF parallel AB macht, und die Punkte A und F durch eine gerade Linie mit einander verbindet.

Nun wollen wir den eilften Satz betrachten, der eine Aufgabe enthält, und versuchen, wie wir dabei die Auflösung mit ihrem Beweise finden können.

Nehmen Sie an, daß die Linie AB in H auf die verlangte Art getheilt sey, und überlegen Sie, wie sichs alsdann verhalte, oder was, wenn dies seyn soll, Statt finden müsse? Wenn *H* der gesuchte Theilungspunkt ist, so muß das Rechteck *BK* = GA (= AHq) seyn; und soll dies Statt finden, so muß BC (= ABq) = GC (= AF × FC) seyn. Bis hieher ergiebt sich alles sehr leicht, aber nun frägt sich: Wenn wird AF × FC = ABq seyn? Da AF eine Verlängerung von AC ist, so ist es kaum zu vermeiden, bei einer aufmerksamen Ueberlegung an den sechsten und zehnten Satz zu denken, und da findet man denn nach jenem, daß

AF × FC = ABq seyn werde, wenn

AE = EC, und

AF × FC + AEq = BAq + AEq = BEq,

und folglich

BE = FE ist.

Ist man bis hieher gekommen, so kann man rückwärts schließen: Wenn

$BAC = R$, und $AE = EC$, so ist
$BEq = BAq + AEq$; und wenn man also
EA nach F verlängert, so daß $EF = EB$
wird, so ist
$EFq = BEq = AF \times FC + AEq$, also
$AF \times FC + AEq = BAq + AEq$, und
daher
$AF \times FC = BAq$, und
$AF \times FC - HC = BAq - HC$, oder
$GA = AHq = BK = BH \times BA$.

Und nun fällt in die Augen, daß man, um eine gerade Linie *AB* auf die im gegenwärtigen Satze verlangte Art zu theilen, das Quadrat BC der gegebenen Linie AB machen, die Seite AB desselben in E halbiren, BE ziehen, EA, bis EF = BE, verlängern, und das Quadrat von AF oder AG beschreiben müsse. Hat man das gethan, und GH bis nach K verlängert, so ist die Richtigkeit des Verfahrens aus dem eben geführten Beweise klar, den man indeß nun auf folgende Art abkürzen kann. Da
$AE = EC$, so ist
$AF \times FC + AEq = EFq$, und da
$BEq = ABq + AEq$, und
$BE = EF$, auch
$AF \times FC + AEq = ABq + AEq$, also
$AF \times FC = ABq$, und
$AHq = BK$.

Der

Der Weg, den wir hier gegangen sind, verdient noch eine kurze Ueberlegung. Wir nahmen dabei das, was geschehen sollte, als bereits gethan an, überdachten darauf, was Statt finden müßte, wenn das Angenommene richtig seyn sollte, überlegten ferner, was das auf diese Art Gefundene voraussetzte, und gingen so so lange fort, bis wir auf eine Operation stießen, wozu wir nach dem bereits Erlernten im Stande waren. Nun fingen wir von diesem letzten, und also von etwas bekannten an, und gingen dann in umgekehrter Ordnung bis zu dem Gesuchten, oder dem vorhin als bekannt angenommenen Unbekannten fort; und nachdem wir uns dadurch überzeugt hatten, daß wir das Gesuchte aus dem gedachten Bekannten finden könnten, so bemerkten wir nunmehr alle zur Auflösung der vorseyenden Aufgabe nöthigen Operationen, und setzten den Beweis der so gefundenen Auflösung aus dem vorher bemerkten zusammen. Ein solches Verfahren wird ein analytisches genannt, welches sich also dadurch unterscheidet, daß man dabei von dem Unbekannten anfängt, und von demselben stufenweise d. h. durch lauter bekannte Verbindungen zu Etwas Bekannten fortgeht. Ihm steht das syntheтische Verfahren entgegen, wobei man jedesmal vom Bekannten und Ausgemachten anfängt, und davon stufenweise bis zu dem Unbekannten fortschreitet. Die Synthesis ist, sobald es um feste Ueberzeugung zu thun ist, nothwendig; die Analysis aber erleichtert die Erfindung dessen, was man sucht. Das analitische

sche Verfahren bei Aufgaben und Lehrsätzen verdient daher gekannt und gebraucht zu werden; aber gut ist es, daß man, insbesondere im Anfange, um auch von dem Gefundenen ganz überzeugt zu werden, damit zugleich, so wie wir gethan haben, das synthetische verbindet.

Um das Gesagte noch durch ein ander Beispiel deutlich zu machen, so wollen wir die Aufgabe wählen: Ein Quadrat zu machen, welches einem gegebenen Rechtecke gleich sey.

Hier sey das gegebene Rechteck das beim vierzehnten Satze stehende BEDC, und HE sey die Seite des gesuchten Quadrats. Hier ist offenbar, daß wenn BE × ED = HEq seyn soll, auch BE × EF = HEq seyn muß, wenn EF = ED ist; und daß man BE × EF an Statt BE × ED nehmen muß, um ein Rechteck zu erhalten, welches man nach den vorhergehenden Sätzen mit andern und insbesondere mit Quadraten vergleichen kann. Ferner entdeckt man bald, daß BE × EF + GEq = GFq sey, wenn BG = GF, nach Satz 5; und hat man dies wahrgenommen, so ist auch leicht einzusehen, daß BE × EF = HEq seyn müsse, wenn GFq = GHq = HEq + GEq, und also GH = GF gemacht worden. Da man nun dieses erhält, wenn man BE nach F, bis EF = ED ferner DE unbestimmt verlängert, dann BG = GF macht, und nun aus G mit BG oder GF einen Kreis beschreibt, der die verlängerte DE

in H schneidet: so ergiebt sich für die Auflösung der gedachten Aufgabe, daß man die Seiten BE und DE des Rechtecks BEDC, und zwar BE, bis EF = ED, DE aber unbestimmt verlängern, dann BG = GF machen, und aus G mit BG oder GF einen Kreis oder Halbkreis beschreiben müsse. Zieht man nemlich aus dem Schneidungspunkte H den Radius HG = BG = GF so ist

$$BE \times EF + GEq = GHq$$
$$GHq = HEq + GEq, \text{ also}$$
$$BE \times EF + GEq = HEq + GEq, \text{ und}$$
$$BE \times EF \; (= BEDC) = HEq.$$

Wie aus dieser Aufgabe die Euclideische im vierzehnten Satze gemacht werden könne, fällt nach einiger Ueberlegung von selbst in die Augen.

Die Beweise endlich des zwölften und des dreizehnten Satzes sind nach den obigen Regeln gar nicht zu verfehlen. Denn einmal ergeben sich die dabei nöthigen Figuren, sobald man alle in den Sätzen vorkommende Dinge gehörig construirt, und sind sie entworfen, so darf man sich nur die in den Sätzen genannten Rechtecke deutlich vorstellen, um sogleich die Sätze aus den vorhergehenden zu finden, welche man zum Grunde legen muß. Im zwölften Satze kommt CA × AD vor, welches ein Rechteck zwischen den Theilen der Linie CD ist, im dreizehnten aber CB × BD, welches ein Rechteck zwischen der ganzen Linie CB und dem einen Theile derselben BD ist. Folglich hat man bei jenem

Satze den fünften, und bei diesem den siebenten Satz nöthig. Und dies vorausgesetzt, so ergiebt sich für den zwölften Satz

$$CDq = CAq + ADq + 2\,CA \times AD,$$

also da

$$DBq = DBq$$

$$CDq + DBq = CAq + ADq + DBq + 2\,CA \times AD,$$ oder

$$CBq = CAq + ABq + 2\,CA \times AD$$

und für den dreizehnten

$$CBq + BDq = CD + 2\,CB \times BD,$$ und da

$$ADq = ADq$$

$$CBq + BDq + ADq = CDq + ADq + 2\,CB \times BD$$ oder

$$CBq + ABq = ACq + 2\,CB \times BD,$$

Wie aber, wenn der zwölfte und dreizehnte Satz nicht selbst, sondern nur die Figuren gegeben wären, und man die Vergleichung ohne weitere vorhergehende Bestimmung suchen sollte? Alsdann fiele wenigstens in die Augen, daß in der einen Hälfte des Hülfssatzes zum zwölften Satze CAq, und in dem zum dreizehnten Satze nothwendig BCq, BDq in der einen Hälfte DCq und in der andern enthalten seyn müßte, und dieses würde auf die bei jedem nöthigen Hülfssätze führen, und dann reichen abermals die oben gegebenen Regeln aus.

Hier schließe ich diese Betrachtung. Lesen Sie nun die übrigen Sätze des zweiten Buchs alle noch einmal im Euclides für sich durch, damit Sie

das, was ich ich dem folgenden Briefe ferner darüber sagen werde, mit der gehörigen Deutlichkeit und Leichtigkeit mögen fassen können.

Siebenzehnter Brief.

Fortsetzung der Anmerkungen zu dem zweiten Buche der Euclideischen Elemente.

Gegen das Ende des ersten Buchs oder mit dem sechs und vierzigsten Satze desselben fing Euclides die Betrachtung der Vierecke an, deren Erklärungen er gleich zu Anfange von der dreißigsten Nummer an mitgetheilt hatte, und nahm die Vergleichung eines Quadrats mit zwei andern, **weil** dies unter den hier möglichen Vergleichungen **die** einfachste ist, noch in dem ersten Buche mit. Der Gegenstand, der nun zunächst folgen kann, besteht daher in der Vergleichung der Rechtecke so wohl unter sich als mit Quadraten, und so fällt der Zusammenhang des zweiten Buchs der Euclideischen Elemente, welches sich damit beschäftiget, mit dem ersten Buche in die Augen.

Aber wie verhält es sich nun mit der Ordnung, in welcher die Sätze dieses zweiten Buchs stehen? Wir wollen versuchen, ob wir dieselbe entdecken können, gesetzt auch, daß wir es bei einem bloßen Versuche sollten bewenden lassen müssen.

Das

Das ist zuvörderst leicht einzusehen, daß es jetzt nicht mehr um die Vergleichung Eines Rechtecks mit Einem andern zu thun seyn kann, weil alles, was darüber zu sagen ist, aus den Sätzen des ersten Buchs durch eine leichte Entwickelung derselben gefolgert werden kann, und es muß also der Gegenstand des zweiten Buchs in der Vergleichung Eines Rechtecks mit mehrern andern bestehen. Ferner bedarf auch das keiner weitern Auseinandersetzung, daß die mit einander zu vergleichenden Rechtecke gewisse Dinge mit einander gemein haben müssen; denn wie wäre sonst an eine Vergleichung derselben zu denken?

Bleiben wir hier fürs erste stehen; und nehmen nun zu den Seiten des einen Rechtecks zwei Linien a und b an, welche Sie sich jetzt gedenken mögen, wie Sie wollen: so ist klar, daß wir zu den mit $a \times b$ zu vergleichenden Rechtecken zwar die eine Linie b behalten können, aber zu den übrigen andere Seiten als a annehmen müssen. Ganz willkührlich dürfen wir aber dieselben auch nicht annehmen, weil sonst alle Vergleichung wegfällt, und auf diese Art bleibt nichts weiter übrig, als daß wir, wenn wir diese übrigen Seiten c und d nennen, $c + d = a$ nehmen. Ueberlegen wir nun diesen Fall, so finden wir durch aufmerksame Betrachtung der hier nöthigen Construktion, daß

$$a \times b = b \times c + b \times d.$$

Daß wenn $a = c + d + e \ldots$, auch

$$a \times b = b \times c + b \times d + b \times e \ldots$$

seyn werde, entdeckt sich darauf ebenfalls bald, und so stünde also der erste Satz des zweiten Buchs ganz an der ihm zukommenden Stelle.

Nun kann man ferner bei dem zuerst angenommenen Falle setzen

einmal, daß $b = a$, und

zweitens, daß $b = c$, oder $= d$ sey.

Nimmt man $b = a$, so verwandelt sich

$a \times b = b \times c + b \times d$, in

$a \times a = a \times c + a \times d$; und dies ist Euclids zweiter Satz:

setzt man aber $b = c$, so wird

$a \times b = b \times c + b \times d$, in

$a \times c = c \times c + c \times d$, und wenn man $b = d$ setzt, in

$a \times d = d \times c + d \times d$ verwandelt, und dies ist Euclids dritter Satz.

Endlich kann man da $a = c + d$ seyn soll, einmal mit a. und $c + d$ mit $c + d$ zu Rechtecken verbinden, und so gelangt man zu Euclids vierten Satze, den Sie in des Hrn. Hofr. Kästners Lehrbuche S. 198. Zus. 11. auf eine andere Art gefunden und bewiesen kennen gelernt haben.

Die

Die vier ersten Sätze ergeben sich auf diese Art leicht; allein wie nun weiter? Wir haben bisher die angenommene oder gegebene gerade Linie AB in zwei oder mehr willkührliche Theile getheilt; was ist natürlicher als daß wir dieselbe nun auf eine bestimmte Art zu theilen versuchen? Wollten wir sie bloß in zwei gleiche Theile theilen, so hülfe uns das zu unserer gegenwärtigen Absicht nichts; also bleibt zunächst die Theilung in zwei gleiche und in zwey ungleiche Theile übrig, und so ist der Weg zu dem fünften Satze gebahnt. Es ist aber die Theilung einer geraden Linie in zwei gleiche und in zwei ungleiche Theile auf eine doppelte Art möglich; indem man entweder mit der Theilung in gleiche, oder mit der Theilung in ungleiche Theile anfangen kann. Fängt man von der Theilung in zwei gleiche Theile an, so muß man natürlicher Weise die ganze Linie erst in zwei gleiche, und dann in zwei ungleiche Theile theilen; fängt man aber von der Theilung in zwei ungleiche Theile an, so kann man darauf auch den einen der erhaltenen ungleichen Theile in zwei gleiche Theile theilen, und dann erhält man die angenommene gerade Linie auf die Art getheilt, daß man sie auch als eine gerade Linie betrachten kann, die erst in zwei gleiche Theile getheilt, und darauf um ein beliebig Stück verlängert worden ist. Dies erweitert nun schon unsern Gesichtskreis wieder, und lassen wir uns die Mühe nicht verdrießen, die auf diese Art gefundenen Dinge genau zu betrachten, so wird sichs wahrscheinlich mit dem übrigen ebenfalls finden.

Was können wir also mit einer Linie, die in zwei gleiche und in zwei ungleiche Theile getheilt ist, vornehmen, wenn wir uns dabei die Vergleichung der Rechtecke zum Ziele vorsetzen? Zunächst wohl nichts anders, als daß wir die Rechtecke zwischen den ungleichen und zwischen den gleichen Theilen, d. h. das Rechteck zwischen den ungleichen Theilen und das Quadrat der Hälfte construiren. Thun wir dies, so erhalten wir die Figur beim fünften Satze bis auf die Linie HM, HG, EH, und HB. Da hierbei noch an keine Vergleichung zu denken ist, so müssen wir KH nach M, und DH nach G verlängern, und nun ist aus dem S. 170 f. bereits Gesagten bekannt, wie der fünfte Satz selbst gefunden werden kann.

Nehmen wir nun eine Linie, die in zwei gleiche Theile getheilt, und darauf beliebig verlängert worden ist, wie ABD in der Figur beim sechsten Satze, so führt die Vorstellung von dieser Linie, insbesondere wenn man sich in B in zwei ungleiche Theile getheilt, und darauf AB halbirt gedenkt, darauf, daß wir das Rechteck zwischen AB und BD, und das Quadrat von CB construiren. Dabei aber zeigt sich nichts, was wir bequem mit einander in Vergleichung stellen könnten, und außerdem ist es auch nicht schwer zu bemerken, daß das Quadrat von CB hier nicht füglich zur Vergleichung mit dem Rechtecke zwischen AB und BD gebraucht werden kann, da wir dasselbe vorhin mit einem Rechtecke zwischen zweien Theilen von AB verglichen haben.

haben. Ist man so weit gekommen, so ist es fast unvermeidlich auf die Construktion des Quadrats von CD an Statt des Quadrats von CB zu verfallen; und hat man dieses außer dem Rechtecke zwischen AB nnd BD entworfen, so kommt es nun auf die Verlängerung der Linien BH und KH an, um die ganze Figur des sechsten Satzes bis auf EH und HD zu erhalten, und dann ist die Entdeckung des sechsten Satzes selbst hinlänglich vorbereitet. Denn nun ist, man mag EH und HD ziehen oder nicht, sehr leicht zu bemerken, daß

$$AL = LB = MG,$$ also

$$AL + LB = LB + MG,$$ folglich

$$AL + LB + BM = LB + BM + MG,$$ oder

$$AL + LB + BM + LG = LB + BM + MG + LG,$$ oder

$$AM + LG = CF$$ ist.

Und nun noch einen Augenblick bei diesem Satze verweilt, so ist, da $AL = LB$ ist auch $AL + BM = LB + BM$, also $AM + BM = 2\,CM$; folglich, da auch $AM + BM + LG = CF + BM$ ist

$$2\,CM + LG = CF + BM,$$ oder

$$2\,CD \times DB + CBq = CDq + DBq$$

und wenn man also CD als eine gerade und in zwei ungleiche Theile getheilte gerade Linie betrachtet, auf diese Art auch der siebente Satz gefunden.

Auf diese Weise haben wir einen neuen Satz von den Rechtecken bei einer geraden Linie, die in zwei beliebige Theile getheilt werden, gefunden. Stel-

len Sie sich denselben bei der Figur des siebenten Satzes vor, und verlängern Sie nunmehr CB, bis BD = CB, machen Sie ferner das Quadrat von AD, und verlängern Sie die Linien HF, CN und BE, so bekommen Sie eine Figur, die nach den S. 169 170 gegebenen Regeln behandelt, zum achten Satze des Euclides führt.

Wir haben vom fünften Satze an zwei Linien zum Grunde gelegt, bei welchen sich die darin vorgenommene Theilung von derjenigen, welche bei den im Anfange betrachteten Linien Statt fand, auf eine merkliche Art unterschied, und es *ist sehr zu* vermuthen, daß die Theilung derselben in *gleiche* Theile uns zu Betrachtungen müsse führen können, welche bei den Linien, die bei den vier ersten Sätzen zum Grunde lagen, nicht angestellt werden konnten. Soll dies seyn, so muß man dabei auch andre Construktionen zu machen im Stande seyn, die doch aber gleichwohl nur auf Rechtecke oder auf Quadrate führen müssen. Dies ist eine Betrachtung, die hier sehr natürlich ist, und die, weiter fortgesetzt, uns zu dem neunten und zehnten Satze des Euclides führen würde. Indeß wollen wir sie bei Seite setzen, und einen andern Weg einschlagen.

Wir haben also bisher theils bloße Rechtecke unter einander, theils Rechtecke mit Quadraten verglichen. Quadrate sind ebenfalls Rechtecke, allein sie enthalten eine Bestimmung mehr als die Rechtecke im eigentlichen Verstande, und können

also

also als eine besondere Art derselben betrachtet werden. Da das Bisherige die Elementarsätze zur Vergleichung der Rechtecke unter einander und mit Quadraten enthält, so folgt also nunmehr, daß wir die Quadrate unter einander zu vergleichen suchen. Betrachten wir nun dabei wieder fürs erste solche Linien, als wir ganz im Anfange gebraucht haben, so führt einmal die bloße Construktion der Quadrate dieser Linien und ihrer Theile zu nichts; und wollen wir ferner etwa aus dem Theilungspunkte oder dem einen Endpunkte der angenommenen Linie senkrechte Linien errichten, und dieselben entweder einem Theile oder der ganzen Linie gleich machen, um durch nunmehrige Anwendung der ersten Forderung rechtwinklige Dreiecke zu erhalten, wo die Catheten, und also auch das Quadrat der Hypothenuse bekannt ist: so erkennet eine mäßige Ueberlegung auch dies bald für eine unnütze Arbeit. Wir müssen hier also von den Linien anfangen, welche uns auf den fünften und die folgenden Sätze geführt haben, und da auch hier die bloße Construktion der Quadrate diese Linien und ihrer Theile zu keiner Vergleichung führt: so bleibt nichts übrig, wenn uns nicht die Errichtung senkrechter Linien aus den Theilungspunkten oder aus den Endpunkten der angenommenen Linie, insbesondere, wenn wir dieselben einem Theile oder der ganzen Linie gleich machen, nichts hilft. Allein nehmen Sie nun zuvörderst die Linie AB in der Figur des neunten Satzes, worin AC = CB ist, und errichten Sie entweder aus C die Linie CE = AC, oder aus

D

D die Linie DF = DB senkrecht. Im erstern Falle bieten sich die Hülfslinien AE und EB sogleich von selbst dar, und da man damit allein nicht auskommt, so ist man genöthiget DF parallel der CE zu ziehen, wodurch sich F ergiebt; und da auch dieses noch nicht hinlänglich ist, so ist man gezwungen auch GF parallel AB und dann AF zu *ziehen*. Zieht man hingegen DF auf die erwähnte Art, so bietet sich BF sogleich von selbst dar, und nun CG der DF parallel gezogen, so giebt die verlängerte BF die CE = EB worauf man die übrigen Hülfslinien wieder so wie vorhin findet. Sobald man aber die Figur, die sich auf diese Art *nicht verfehlen* läßt, gefunden hat, ist das weitere aus dem S. 171, 172, Gesagten bekannt.

Errichten Sie nunmehr auf der Linie ACBD Fig. 35, worin AB in C in zwei gleiche Theile getheilt, und darauf bis in D beliebig verlängert worden ist, aus C die senkrechte Linie CE = AC und ziehen Sie AE und EB. Soll nun eine durch *D* mit EC parallel gezogene Linie von EB geschnitten werden, so wie solches bei dem vorhergehenden Satze geschah, so muß EB verlängert werden, und DF auf der andern Seite zu liegen kommen. Verlängern Sie, nachdem Sie dieses gethan, auch EC, und legen darauf durch F eine Linie mit AB parallel, die verlängert die EC in G schneidet, und ziehen endlich auch AF: so ist wiederum nicht nur das Dreieck ACE, und das Dreieck ECB, sondern auch

auch das Dreieck AEB rechtwinklig und gleichschenklig, und also

$$CAB = AEC = CEB = EBC = \frac{1}{2} R.$$

Hierdurch aber wird $DBF = \frac{1}{2} R$, und weil $BDF = R$ auch $BFD = \frac{1}{2} R$ und folglich $DF = DB$; ferner weil $EGF = R$, $GFE = \frac{1}{2} R$, und also $FG = GE$ und daher, sowohl △BDF, als △ GEF rechtwinklig und gleichschenklig. Dies vorausgesetzt so ist

$AFq = AEq + EFq$, ferner
$AFq = ADq + DFq$, also
$ADq + DFq = AEq + EFq$. Es ist aber
$DFq = DBq$,
$AEq = 2\ ACq$ und
$EFq = 2\ CDq$; also
$ADq + DFq = 2\ ACq + 2\ CDq$.

Die Figur, welche wir hier gebraucht haben, unterscheidet sich von der Euclideischen in einigen Stücken; sie verdient aber deswegen vorgezogen zu werden, weil sie mit der Figur des neunten Satzes so übereinstimmt, daß aller Unterschied in der entgegengesetzten Lage der DF und der Verlängerung der EC besteht. Wegen dieser Uebereinstimmung kann man daher auch den Beweis des neunten und zehnten Satzes, ja selbst beide Sätze in einen zusammenziehen.

Die

Die Sätze, welche wir bisher betrachtet haben lassen sich, wenn man will, in drei Classen theilen. Denn es werden darin

1. Rechtecke unter einander, im ersten Satze,

2. Rechtecke mit Quadraten, im zweiten bis achten Satze, und

3. Quadrate mit Quadraten, im neunten und zehnten Satze verglichen. Es erstrecken sich also dieselben auf alle hier mögliche Fälle, und man hat an ihnen unstreitig die Elementarsätze von der Vergleichung der Rechtecke und Quadrate, so weit sie auf dem betretenen Wege gefunden werden konnten, in der erforderlichen Vollständigkeit. Da es indeß lauter Lehrsätze sind, so kann man nunmehr fragen: Wozu man dadurch in den Stand gesetzt werde? und läßt man dabei, wie billig, die Aufgaben weg, die sich aus diesen Lehrsätzen unmittelbar herleiten lassen; z. B. zwei Rechtecke, die eine Seite gleich haben, in Ein Rechteck zu verwandeln: so bleibt zunächst nichts weiter übrig, als einen Versuch zu machen, ob man nicht eine gerade Linie so theilen könne, daß das Rechteck zwischen den beiden Theilen, oder zwischen dem einen Theile und der ganzen Linie einem Quadrate gleich sey? Stellt man diesen Versuch an, so ist die Theilung einer geraden Linie in zwei Theile, so daß das Rechteck zwischen dem einen Theile und der ganzen Linie dem Quadrate des andern Theils gleich sey; der einzige Fall,

Fall, der eine Aufgabe darbietet; und wie man die Auflösung finden kann, ist bereits S. 174 f. gezeigt worden.

Bis jetzt hat sich also die Ordnung, welcher Euclides gefolgt ist, aus wenigen und leichten Regeln finden lassen, und es kommt nun nur noch darauf an, den Grund zu zeigen, warum die drei folgenden Sätze hier stehen? Man soll ja aber nach Br. 3. S. 23, so oft man schon betrachtete Gegenstände hinterher von einer neuen Seite untersuchen kann, wieder zu denselben zurückkehren, und wir haben auch *bereits* mehrere Beispiele davon gehabt daß Euclides solches wirklich zu thun pflege. Nun ist in dem ersten Buche das Quadrat der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den beiden Quadraten der Catheten verglichen worden; um weiter zu gehen, müssen wir also das Quadrat einer Seite in einen stumpfwinkligen und spitzwinkligen Dreiecke mit den Quadraten der übrigen Seiten zu vergleichen suchen, und um den Pythagorischen Lehrsatz dabei gebrauchen zu können, aus der Spitze des einen Winkels auf die gegenüberstehende Seite eine senkrechte Linie herabfällen. Sobald aber dies gethan ist, so kommt es nur auf eine sorgfältige Betrachtung der erhaltenen Construktion nach den bisher erlernten Sätzen an, um den zwölften und dreizehnten Satz zu finden, und so wären wir also auch mit diesen beiden Sätzen in Richtigkeit.

Endlich haben wir im ersten Buche auch die Art und Weise betrachtet, jede geradlinige Figur in ein Parallelogramm zu verwandeln. Sollten wir nunmehr nicht im Stande seyn, auch jede geradlinige Figur in ein Quadrat zu verwandeln? Hierbei kommt es bloß auf die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat an, worüber ich Br. 16. S. 177 f. gesprochen habe, und da uns die bisherigen Sätze dazu in den Stand setzen, so wird daher auch diese Aufgabe mit Recht unter die Sätze des zweiten Buchs aufgenommen.

Achtzehnter Brief.

Beschluß der Anmerkungen zu dem zweiten Buche der Euclideischen Elemente.

So wie sich die Geometrie mit Größen beschäftiget, bei welchen man nicht bloß auf die Menge der Theile, sondern auch auf die Verbindung dieser Theile sehen muß: so hat es die Arithmetik, welche ebenfalls ein Hauptheil der Mathematik ist, mit den Größen zu thun, bei welchen man bloß auf die Menge der Theile, welche sie in sich fassen, sieht. Größen, bei welchen man nicht bloß die Menge der Theile, sondern auch die Verbindung derselben betrachtet, werden **stetige** Größen, Größen aber, bei welchen man bloß auf die Menge der Theile sieht, **discrete** Größen genennet. Alle stetige Grö-

ßen werden zu discreten Größen, sobald man die Verbindung ihrer Theile aus der Acht läßt, und dann kann man sie durch Zahlen ausdrucken; und zwar durch unbenannte, wenn man auch die Art ihrer Theile nicht in Erwägung zieht, sondern bloß auf die Menge Rücksicht nimmt, oder durch benannte, wenu man außer der Menge der Theile auch die Art derselben betrachtet. Ferner giebt alsdenn jede gerade Linie eine Zahl; ein Rechteck zwischen zweien geraden Linien ein Produkt aus den beiden Zahlen dieser Linien; und ein Quadrat die Quadratzahl der Zahl seiner Seiten.

Dies vorausgesetzt, so lassen sich die zehn ersten Sätze des bisher betrachteten zweiten Buchs der Euclideischen Elemente sehr leicht in arithmetische Sätze verwandeln; und es wird nicht ohne allen Nutzen seyn, wenn wir diesem Gegenstande einige Augenblicke unsere Aufmerksamkeit schenken. Ich will dabei zuvörderst diese arithmetischen Sätze in eben der Ordnung hersetzen, in welcher sie sich aus den Euclideischen Sätzen ergeben, und sie an einzeln Beispielen erläutern. Sie sind

1. Wenn man von zwei Zahlen die eine in beliebig viele Theile theilt: so ist das Produkt aus beiden Zahlen den Produkten aus der ungetheilten Zahl und jedem der Theile der andern zusammengenommen gleich. Zeigt z. B. das Zeichen × zwischen zwei Zahlen das Produkt dieser beiden Zahlen an, so ist, wenn die Zahlen 9 und 6

genommen, und $9 = 5 + 4$, oder $4 + 3 + 2$ gesetzt wird, im ersten Falle $6 \times 9 = 6 \times 5 + 6 \times 4 = 54$, und im zweiten $6 \times 9 = 6 \times 4 + 6 \times 3 + 6 \times 2 = 54$.

2. Wenn man eine Zahl in zwei beliebige Theile theilt: so ist die Quadratzahl der ungetheilten Zahl den beiden Produkten aus ihr und den beiden Theilen zusammengenommen gleich. So ist z. B. wenn $10 = 6 + 4$ gesetzt wird $10 \times 10 = 10 \times 6 + 10 \times 4 = 100$.

3. Wenn man eine Zahl in zwei beliebige Theile theilt: so ist das Produkt aus der ungetheilten Zahl und dem einen Theile, der Quadratzahl dieses Theils und dem Produkte beider Theile zusammengenommen gleich. So ist z. B. wenn wieder $10 = 6 + 4$ gesetzt wird, $10 \times 6 = 6 \times 6 + 6 \times 4 = 60$, oder $10 \times 4 = 4 \times 4 + 4 \times 6 = 40$.

4. Wenn man eine Zahl in zwei beliebige Theile theilt: so ist die Quadratzahl der ungetheilten Zahl den Quadratzahlen der beiden Theile und dem doppelten Produkte dieser Theile zusammengenommen gleich. So ist, wenn $10 = 6 + 4$ gesetzt wird, $10 \times 10 = 6 \times 6 + 4 \times 4 + 2 \times 6 \times 4 = 100$.

5. Wenn man eine Zahl in zwei gleiche und in zwei ungleiche Theile theilt: so ist das Produkt der ungleichen Theile, nebst der Quadratzahl des Unterschiedes zwischen dem einen ungleichen

Theile

Theile und der Hälfte, der Quadratzahl der Hälfte gleich. So ist, wenn $10 = 5 + 5 = 7 + 3$ gesetzt wird, da $7 - 5 = 5 - 3 = 2$ ist, $3 \times 7 + 2 \times 2 = 5 \times 5 = 25$.

6. Wenn man eine Zahl in zwei gleiche Theile theilt, und darauf eine andere beliebige Zahl zu ihr hinzusetzt: so ist das Produkt der Summe der beiden gedachten Zahlen und der hinzugesetzten nebst der Quadratzahl des einen gleichen Theils, der Quadratzahl der Summe dieses gleichen Theils und der hinzugesetzten Zahl gleich. So ist, wenn $10 = 5 + 5$ angenommen, und darauf $10 + 2 = 12$ gemacht wird, $12 \times 2 + 5 \times 5 = 7 \times 7 = 49$.

7. Wenn man eine Zahl in zwei beliebige Theile theilt: so sind die Quadratzahlen der ungetheilten Zahl und des einen Theils, dem doppelten Produkte der ungetheilten Zahl und des gedachten Theils nebst der Quadratzahl des andern Theils gleich. So ist, wenn $8 = 5 + 3$ angenommen wird, $8 \times 8 + 5 \times 5 = 2 \times 8 \times 5 + 3 \times 3 = 89$, oder $8 \times 8 + 3 \times 3 = 2 \times 8 \times 3 + 5 \times 5 = 73$.

8. Wenn man eine Zahl in zwei beliebige Theile theilt: so ist das vierfache Produkt der ungetheilten Zahl und des einen Theils nebst der Quadratzahl des andern Theils, der Quadratzahl der Summe der ungetheilten Zahl und des vorhin gedachten Theils gleich. So ist, wenn $8 = 5 + 3$ gesetzt wird, $4 \times 8 \times 5 + 3 \times 3 = (8 + 5) \times (8 \times 5)$

$13 \times 13 = 169$; oder $4 \times 8 \times 3 + 5 \times 5 = (8 + 3) \times (8 + 3) = 11 \times 11 = 121$.

9. Wenn man eine Zahl in zwei gleiche und in zwei ungleiche Theile theilt: so sind die Quadratzahlen der beiden ungleichen Theile zusammengenommen, der doppelten Quadratzahl der Hälfte nebst der doppelten Quadratzahl des Unterschiedes zwischen der Hälfte und dem einen der ungleichen Theile gleich. Es sey wieder $10 = 5 + 5 = 7 + 3$, also $7 - 5 = 5 - 3 = 2$: so ist $7 \times 7 + 3 \times 3 = 2 \times 5 \times 5 + 2 \times 2 \times 2 = 58$.

10. Wenn man eine Zahl in zwei gleiche Theile theilt und darauf eine andere beliebige Zahl zu ihr hinzusetzt: so ist die Quadratzahl der Summe dieser beiden Zahlen nebst der Quadratzahl der hinzugesetzten Zahl, der doppelten Quadratzahl der Hälfte nebst der doppelten Quadratzahl der Summe der Hälfte und der hinzugesetzten Zahl gleich. Es sey wieder $10 = 5 + 5$, und $10 + 2 = 12$, und $5 + 2 = 7$, so ist $12 \times 12 + 2 \times 2 = 2 \times 5 \times 5 + 2 \times 7 \times 7 = 148$.

Nachdem ich aber auf diese Art gezeigt habe, wie man die zehn ersten Sätze des zweiten Buchs der Euclideischen Elemente in arithmetische Sätze verwandeln kann, wird es nöthig seyn, noch ein Paar Worte über den Grund, warum man dies thun kann, hinzuzufügen; und dabei kommt alles darauf an, Sie zu überführen, daß das Produkt

zweier

zweier Zahlen, wenn diese Zahlen gerade Linien ausdrucken, das Rechteck zwischen diesen Linien; und die Quadratzahl einer Zahl, wenn diese Zahl ebenfalls eine gerade Linie ausdruckt, das Quadrat dieser Linie darstelle. Für jetzt kann dazu folgende Entwicklung hinlänglich seyn.

Wenn man eine gerade Linie durch eine unbenannte Zahl ausdruckt, so giebt man nur die Menge der Theile dieser Linie an, und setzt die Größe eines jeden Theils als bekannt voraus. Eben das thut man, wenn man ein Rechteck oder ein Quadrat durch eine gerade Zahl ausdruckt. So wie aber das Maaß einer geraden Linie nur eine gerade Linie ist und seyn muß: so ist auch das Maaß eines Rechtecks oder eines Quadrats nur eine ebene Figur, und man hat dazu, weil es unter allen das schicklichste dazu ist, allgemein das Quadrat gewählt. Wenn also eine gerade Linie durch 4 ausgedruckt oder = 4 gesetzt wird, so heißt das, diese Linie sey 4 Fuß, oder 4 Zoll, oder 4 Linien u. s. w. lang; und wird ein Rechteck = gleich 24 oder ein Quadrat = 16 gesetzt: so heißt das, das Rechteck enthalte 24, und das Quadrat 16 andere Quadrate, z. B. Quadratfuß, oder Quadratzoll, oder Quadratlinien, u. d, gl, Druckt man ferner gerade Linien und Rechtecke und Quadrate unter einander durch unbenannte Zahlen aus, so wird dabei ferner vorausgesetzt daß die Theile der Rechtecke, und Quadrate Quadrate von den Theilen seyen, nach welchen man die geraden Linien bestimmt hat; und hat

man daher z. B. unter den Theilen der geraden Linien Zolle zu denken, so muß man sich die Theile der Rechtecke und der Quadrate als Quadratzolle vorstellen; sind aber die Theile der Linien Fuße, so sind die Theile der Rechtecke und Quadrate Quadratfuße u. s. w. Endlich sind, wenn mehrere gerade Linien durch unbenannte Zahlen ausgedruckt werden, bei allen diesen Linien durchaus einander gleiche Theile zum Grunde gelegt. Nun betrachten Sie die 36 und 37ste Figur. Wenn Sie in den Seiten AB und AC des Rechtecks ABCD, Fig. 36, die Theile, nach welchen diese Seiten durch Zahlen ausgedruckt werden können, bemerken, und durch die Endpunkte derselben a, b, c, d, e, ferner l, m und n Parallellinien, und zwar durch a, b, c, d und e mit AC, und durch l, m und n mit AB, ziehen: so wird durch die ersten Parallellinien das Rechteck in so viel andere Rechtecke getheilt, als AB Theile hat, und die Seiten dieser Rechtecke sind einer von den Theilen der Seite AB und die Seite AC; durch die andern Parallelen aber wird jedes dieser Rechtecke in so viele andere Rechtecke getheilt, als AC Theile hat, und die Seiten dieser Rechtecke sind die Theile von AB und AC, also einander gleich, und die gedachten Rechtecke selbst Quadrate von den Theilen, durch welche AB und AC gemessen wurden. Es ist also die Zahl eines Rechtecks allezeit das Produkt aus den Zahlen seiner Seiten; und auf eben die Art erhellt, daß die Zahl eines Quadrats allemal die Quadratzahl der Zahl seiner Seiten ist. Dies vorausgesetzt

setzt so hat die Verbindung der Theile, woraus eine stetige Größe besteht, auf die Größe derselben keinen Einfluß, sondern bloß auf ihre Gestalt; und wenn also zwei stetige Größen einander gleich sind, so müssen sie es auch noch seyn, wenn man die Ordnung ihrer Theile verändert, und auch noch, wenn man die Verbindung der Theile ganz aufhebt, aber die Anzahl der Theile unverändert läßt, Folglich müssen nun auch alle die Sätze, welche Euclides im zweiten Buche bis zum zehnten Satze von geraden Linien und den Rechtecken und Quadraten, welche dazwischen eingeschlossen werden, erwiesen hat, auch von den Zahlen gelten, wenn man an Statt jeder geraden Linie eine Zahl, an Statt jedes Rechtecks das Produkt aus den Zahlen seiner Seiten, und an Statt jedes Quadrats die Quadratzahl der Zahl seiner Seiten setzt, weil man sich alle Zahlen als Zahlen gerader Linie, und jedes Produkt als eine Zahl eines Rechtecks u. s. w. vorstellen kann.

Aber man kann auch umgekehrt von den Zahlen und ihren Produkten zu Linien und Rechtecken fortgehen, und dieser Weg führt auf eine sehr leichte Art noch zu verschiedenen andern Sätzen. Das Produkt zweier vieltheiligen Zahlen z. B. ist eine Summe aus den Produkten eines jeden Theils der einen Zahl in jeden Theil der andern; und daher also, wenn man zwei geraden Linien beliebig in Theile theilt, das Rechteck zwischen diesen beiden Linien den Rechtecken, die zwischen den Theilen beider gedacht werden können, zusammen genommen gleich.

Theilen Sie Fig. 38. die Linie AB in E, F und G und die Linie AC in L und M beliebig in Theile, und ziehen Sie durch E F und G die Linie EH, FI, und GK mit AC ferner durch L und M die Linie LN und MO mit AB parallel; so werden AP, EQ, FR GN, LG PT, QV, RO, MH, GI, TK und VD Rechtecke, und AD ist ihnen zusammengenommen gleich; auch sind alle genannten Rechtecke Rechtecke, welche zwischen den Theilen von AB und AC beschrieben werden können.

So wie man aber die beschriebene Uebereinstimmung gebrauchen kann, um von *arithmetischen* Sätzen Veranlassung zu geometrischen zu nehmen: so können dadurch auch umgekehrt geometrische Sätze zur Erfindung arithmetischer, oder solcher Sätze, die sich auf Zahlen beziehen, gebraucht werden. Wäre z. B. die Frage: Wie man eine Quadratzahl finde, die, mit einer gegebenen Zahl vereiniget, wiederum eine Quadratzahl giebt? so könnte man die Antwort darauf aus dem eilften Satze des gegenwärtigen Buchs herleiten. Nach diesem Satze ist nemlich, wenn man eine gerade Linie in zwei beliebige Theile theilt, das vierfache Rechteck zwischen der ganzen Linie und dem einen Theile nebst dem Quadrate des andern Theils, dem Quadrate der aus der ganzen und dem erstgedachten Theile bestehenden Linie gleich. Wenn man also z. B. die gegebene Zahl in vier gleiche Theile theilt, und eine davon um 1 vermindert: so ist die Quadratzahl des Restes diejenige, welche mit der

gege=

gegebenen zusammengenommen wiederum eine Quadratzahl, und zwar die Quadratzahl des um 1 vermehrten gedachten vierten Theils giebt. Es sey die Zahl 32 gegeben, deren vierter Theil 8 ist. Theilt man diese 8 in 7 und 1, so ist nach dem angeführten Euclideischen Satze, wenn man ihn auf Zahlen anwendet $4 \times 8 \times 1 + 7 \times 7 = (8 + 1)$ d. h. $32 + 49 = 81$, der Quadratzahl von 9. Ferner sey die gegebene Zahl 5, so ist der vierte Theil davon $1\frac{1}{4}$. Theilt man diesen Theil in 1 und $\frac{1}{4}$, so ist wieder nach dem angeführten Satze $4 \times 1\frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = (1\frac{1}{4} + 1)(1\frac{1}{4} + 1) = \frac{9}{4} \times \frac{9}{4} = \frac{81}{16} =$ der Quadratzahl von $\frac{9}{4}$.

Auch läßt sich daraus die Art und Weise erkennen, wie man eine Quadratzahl findet, die, um eine gegebene Zahl vermindert, wiederum eine Quadratzahl giebt. Addirt man nämlich zu dem vierten Theile der gegebenen Zahl 1, so ist die Quadratzahl dieser Summe so beschaffen als es verlangt wird. Es sey die gegebene Zahl wieder erstlich 32 und dann 5. Da $4 \times 8 \times 1 + 7 \times 7 = (8 + 1)(8 + 1)$, und $4 \times 1\frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = (1\frac{1}{4} + 1)(1\frac{1}{4} + 1) = \frac{81}{16}$ ist: so ist auch, da man solches durch eine Subtraction gleicher Größen von gleichen findet, $(8 + 1)(8 + 1) - 4 \times 8 \times 1 = 7 \times 7$ und $(1\frac{1}{4} + 1)(1\frac{1}{4} + 1) - 4 \times 1\frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$, d. h. $81 - 32 = 49$ und $\frac{81}{16} - 5 = \frac{1}{16}$.

Doch ich will mich hierbei nicht länger aufhalten, da eine ausführliche und gründliche Auseinandersetzung dieses Gegenstandes mit weit größerer Bequemlichkeit an einem andern Orte in der Folge angestellt werden kann, und das Bisherige bloß deswegen von mir beigebracht ist, um Ihnen zu einiger Vorbereitung auf diese äußerst wichtige Sache zu dienen. Dagegen will ich zum Beschluß dieser Anmerkungen über das zweite Buch der Euclideischen Elemente noch einiger andern Beweise gedenken, die man für verschiedene Sätze führen kann. Ich entlehne aber dieselben, so wie auch mehrers von dem Vorhergehenden daher genommen ist, aus dem Commentar des Clavius über die Elemente des Euclides.

Der neunte Satz: Wenn eine gerade Linie AB in einem Punkte C gleich, und in einem andern D ungleich geschnitten wird: so sind die Quadrate der ungleichen Abschnitte AD und DB den zwiefachen Quadraten der halben Linie AC, und des Abschnitts zwischen den Theilungspunkten CD gleich; läßt sich vermittelst der vorhergehenden Sätze auch auf folgende Art darthun. Es ist

$$ADq = ACq + CDq + 2\ AC \times CD.$$

Satz 4. und da

$DBq = DBq$ ist, so ist daher

$$ADq + DBq = ACq + CDq + DBq + 2\,AC \times CD = ACq + CDq + DBq + 2\,BC \times CD,$$ weil $AC = BC$. Nun ist aber

DBq

$DBq + 2\,BC \times CD = BCq$ (oder ACq) $+ CDq$, Satz 7. Folglich

$$ADq + DBq = ACq + CDq + ACq + CDq$$
$$= 2\,ACq + 2\,CDq.$$

Eben dieselben Sätze geben auch folgenden Beweis an die Hand. Es ist nach dem im Satze Angenommenen

$AC = CB = CD + DB$, und nach Satz 7.

$CBq + CDq = 2\,BC \times CD + DBq$, folglich

$ACq + CDq = 2\,AC \times CD + DBq$, und daher

$ACq + CDq + 2\,AC \times CD + DBq = 2\,ACq, + 2\,CDq$. Da nun

$ACq + CDq + 2\,AC \times CD = ADq$, Satz 4, ist, so ist

$$ADq + DBq = 2\,ACq + 2\,CDq.$$

Ohnerachtet bei diesen beiden Beweisen keine Hülfslinien und von den vorhergehenden Sätzen bloß der siebente und der vierte gebraucht werden: so zweifele ich doch, daß Sie dieselben dem Euclideischen vorziehen werden, indem die Uebersicht bei diesem letztern leichter ist. Uebrigens ist der Weg dazu bald zu finden, da man dabei nichts weiter nöthig hat, als den siebenten und vierten Satz auf die gehörige Art anzuwenden. Noch weniger glaube ich, daß Ihnen der Beweis gefallen wird, den man

man für eben diesen Satz bloß vermittelst einer Construction führt, und welcher folgender ist.

Man beschreibe über der gegebenen Linie AB. Fig. 39 das Quadrat AE und ziehe die Diagonale BF; ferner lege man durch C und D die geraden Linien CG und DH parallel mit AF und BE, und durch die Punkte I und K, in welchen die CG und DH die Diagonale BF schneiden, die geraden Linien LM und NO parallel mit AB oder FE. Ist dies geschehen, so sind nach dem Zusatze des vierten Satzes

1. LG, QP, DO, CM, NH, Quadrate, und

2. LI = AC, QK = CD, und NK = AD, also

3. NH und DO, die Quadrate der ungleichen Theile AD und DB, und

LG und QP, die Quadrate der Hälfte AC, und des Stücks zwischen den Theilungspunkten CD.

und daß nun NH und DO doppelt so groß sind als LG und QP erhellet auf folgende Art.

Vorausgesetzt, was sich bei einer aufmerksamen Betrachtung der Construction bald darbietet, daß nemlich

NI

$NI = QM$
$IH = CP$ und
$CM = IE = LG$ ist: so ist
$NH + DO = LG + QP + NI + IH + DO$; aber
$NI = QM = QP + KM$, also
$NH + DO = LG + 2\,QP + KM + NI + DO$. Ferner ist
$NI = IH = CP$ also
$KM + NI + DO = KM + CP + DO = CM = LG$; folglich
$NH + DO = 2\,LG + 2\,QP$.

Auf eine ähnliche Art läßt sich der zehnte Satz behandeln welcher eine gerade Linie AB betrifft, die erst in C halbirt und darauf willkührlich bis in D verlängert worden ist, und wo

$ADq + BDq = 2\,ACq + CDq$.

Es ist nämlich
$ADq = ACq + CDq + 2\,AC \times CD$, Satz 4, und da
$BDq = BDq$, so ist daher
$ADq + BDq = ACq + CDq + BDq + 2\,AC \times CD$
$= ACq + CDq + BDq + 2\,BC \times CD$, weil $AC = CB$ ist. Nun ist aber
$BDq + 2\,BC \times CD = BCq$ (oder $ACq + CDq$;) Satz 7. Folglich
$ADq + BDq = 2\,ACq + 2\,CDq$.

Oder

Oder es ist nach dem im Satze Angenommenen

$AC = CB$, und also $CD = CB + BD$
$= AC + BD$, und nach Satz 7.
$CDq + CBq' = 2\ BC \times CD + BDq$,
folglich
$ACq + CDq = 2\ AC \times CD + BDq$, und
daher
$ACq + CDq + 2\ AC \times CD + BDq =$
$2ACq + 2\ CDq$. Da nun
$ACq + CDq + 2\ AC \times CD = ADq$,
so ist
$ADq + BDq = 2\ ACq + 2\ CDq$.

Vergleichen Sie diese Beweise mit den vorhergehenden Beweisen des achten Satzes, so werden Sie darunter eine eben so große Aehnlichkeit finden, als unter den beiden Euclideischen Beweisen für den achten und zehnten Satz statt fand.

Wollen Sie sich endlich auch diesen Satz *bloß* vermittelst einer Construction deutlich machen: so verlängern Sie, wie Fig. 40, die Linie AD bis E, so daß DE = BD ist. Ferner beschreiben Sie über AE das Quadrat AF, und legen durch die Punkte C, B und D die Linien CH, BI und DK parallel AG oder EF. Dann ziehen Sie die Diagonale, durch die Punkte L, M, N, worin sie von CH, BI und DK geschnitten wird, OP, QR und ST mit AE oder GF parallel. Ist dies gesche-

schehen, so sind auch hier nach dem Zusatze des vierten Satzes

1. alle Parallelogramme um der Diagonale Quadrate

2. SN = AD, OL = AC, und aN = CD, und also

3. SK und DT die Quadrate der geraden Linien AD und DE oder BD, und

4. OH und aX die Quadrate der geraden Linien AC und CD,

daß nun SK und DT doppelt so groß sind, als die Quadrate OH und aX erhellet auf folgende Art. Vorausgesetzt wieder, was sich bei einer aufmerksamen Betrachtung der Figur sehr bald darbietet, daß nemlich

SL = aV
LK = YX
DT = BN = bZ,
YV = OH und
aV + YX + bZ = aX + YV = aX + OH ist: so ist
SK + DT = OH + aX + SL + LK + DT; aber
SL + LK + DT = aV + YX + bZ = aX + OH; folglich
SK + DT = 2 OH + 2 aX.

Ich

Ich habe diesen Beweis so kurz zusammengezogen, als es möglich ist; gleichwohl gilt auch von ihm, was von dem ähnlichen Beweise des achten Satzes angemerkt worden ist.

Und hier mögen sich meine Anmerkungen über das zweite Buch der Euclideischen Elemente schließen. Wollen Sie etwa noch an einem oder dem andern Satze Ihre Kräfte versuchen, so nehmen Sie dazu insbesondere den eilften und zwölften, und suchen sie dieselben umgekehrt zu beweisen. Da nach diesen Sätzen das Quadrat der Seite eines stumpfwinkligen Dreiecks, welche dem stumpfen Winkel gegenüber steht, größer ist, als die beiden Quadrate der übrigen Seiten, das Quadrat jeder Seite eines spitzwinkligen Dreiecks aber von den beiden Quadraten der übrigen Seiten *um eine* gewisse Größe übertreffen wird: so muß sich auch zeigen lassen, daß ein jedes Dreieck ein stumpfwinkliges ist, wenn darin das Quadrat einer seiner Seiten größer ist, als die beiden Quadrate der übrigen Seiten, und ein spitzwinkliges hingegen, wenn die Quadrate zweier Seiten größer sind, als das Quadrat der dritten. Wie? werden Sie hoffentlich von selbst finden, wenn Sie sich an die Art erinnern, wie der umgekehrte Satz des Pythagorischen Lehrsatzes bewiesen worden ist; allenfalls will ich noch dazu setzen, daß Sie bei dem Beweise den fünf und zwanzigsten Satz des ersten Buchs der Euclideischen Elemente gebrauchen.

In meinem nächsten Briefe werde ich mich mit Ihnen über einige Sätze des dritten Buchs unterhalten.

Neunzehnter Brief.

Ueber einige Sätze des dritten Buchs der Euclideischen Elemente.

Bei demjenigen, was ich Ihnen über einige Sätze des nunmehr folgenden dritten Buchs der Euclideischen Elemente schreiben werde, entferne ich mich von dem Wege, den ich bisher gegangen bin; warum? will ich Ihnen schon gelegentlich sagen.

Euclids zweiter Satz ist: Eine gerade Linie, welche zwei beliebige Punkte in der Peripherie eines Kreises verbindet, fällt innerhalb dieses Kreises. Versteht sich das nicht von selbst? oder sollte etwa dieses der Satz seyn, welchen Hr. Kant meint, wenn er, wie ich Ihnen im siebenten Briefe (S 64 unten) geschrieben habe, sagt: Es muß einen besondern Lehrsatz geben, der aus der Definition (nemlich des Kreises) leicht gefolgert wird, und leicht bewiesen werden kann: daß eine jede Linie, deren alle Punkte von einem einigen gleich weit abstehen, krumm sey? Die hier angeführten Beschaffenheiten hat der hergesetzte Satz wirklich. Wollen Sie außer dem Euclideischen Beweise noch einen andern haben, so ist derselbe folgen-

der. Es seyen A und B irgend zwei Punkte in der Peripherie des Kreises der 41sten Figur, und F ein in der geraden Linie zwischen ihnen befindlicher Punkt. Man ziehe aus D, dem Mittelpunkte des Kreises, die Halbmesser DA und DB, und die gerade Linie DF: so ist, da DA = DB,

DAB = DBA;

und dabei

DFA > als DBA und DFB > als DAB

folglich

sowohl DFA als DFB > als DAF oder DBF

und daher

DF < DA.

Auf diese Art liegt also jeder in der *geraden Linie* AB zwischen A und B befindliche Punkt F dem *Mittelpunkte* näher als jeder von den in dem Bogen AEB gedenkbaren Punkten, welche von D um DA oder DB abstehen; und es fällt also die gerade Linie AB innerhalb des Kreises. Setzen wir nun dieses als ausgemacht voraus, so folgt sehr leicht, daß kein Theil der Peripherie eines Kreises, so klein man denselben auch annehmen mag, gerade sey. Denn da A und B irgend zwei Punkte in der Peripherie des Kreises *Fig.* 41. vorstellen sollen, und man sie also einander so nahe denken kann als man will: so ist klar, daß der Bogen AEB, so klein man ihn auch denken will, gleichwohl nie mit der geraden Linie AB zusammenfalle, sondern beständig von derselben verschieden bleibe. So sind Sie also nunmehr erst davon überzeugt, daß die Peripherie eines jeden Kreises eine krumme Linie sey; und da Sie dazu den betrachteten zweiten Satz des

dritten

dritten Buchs der Euclideischen Elemente brauchen: so habe ich nicht nöthig, Ihnen diesen Satz als einen allerdings wichtigen und nothwendigen Satz in der Lehre vom Kreise zu empfehlen.

Ich gehe zu dem sechszehnten Satze fort: Ein auf eines Kreises Durchmesser, in dessen Endpunkte aufgerichteter Perpendikel, fällt außerhalb des Kreises. Ferner, zwischen dem Kreisbogen und dem Perpendikel fällt keine andere gerade Linie. Desgleichen, der Winkel des Halbkreises ist größer, sein Rest aber kleiner, als jeder geradliniger spitzer Winkel; und werde bei dem, was ich Ihnen hierüber zu sagen habe, die Figur zum Grunde legen, welche Sie in Ihrer Ausgabe der Euclideischen Elemente haben.

Bei dem Satze selbst halte ich mich nicht auf, Euclides hat ihn so deutlich und so streng erwiesen, daß ich nicht nöthig habe, etwas dazu zu setzen. Also zuvörderst einige Fragen.

Die erste: Ist der Winkel des Halbkreises einem rechten Winkel gleich oder nicht? Nach der Figur: Ist der vermischtlinige Winkel DAC gleich dem geradlinigen Winkel DAE oder nicht? Da beider Spitzen A in der Figur auf einander liegen, und der Schenkel AD beiden gemeinschaftlich ist: so müßten die Schenkel AC und AE mehr als den Punkt A mit einander gemein haben, wenn die Winkel DAC und DAE einander gleich seyn sollten. Da also dieses nach dem Euclideischen Beweise nicht statt finden kann, und

die Punkte des Schenkels AC des vermischtlinigen Winkels DAC zwischen dem gemeinschaftlichen Schenkel AD und dem andern Schenkel AE des geradlinigen und rechten Winkels DAE liegen: so ist offenbar, daß der vermischtlinige Winkel DAC nicht dem Winkel DAE gleich, sondern kleiner als derselbe sey.

Die zweite Frage: Ist der Rest des Winkels des Halbkreises, da er kleiner ist, als jeder geradlinige spitze Winkel, nicht etwa $= 0$? Nach der Figur: Ist der vermischtlinige Winkel CAE, an und für sich betrachtet, noch eine wirkliche Größe, oder nicht? Es sey $CAE = 0$. Da nach der Figur

$DAC + CAE = R$, und nach dem Vorhergehenden

$DAC < R$ ist, so kann unmöglich

$$CAE = 0$$

seyn; indem, wenn $CAE = 0$ seyn sollte, da

$DAC < R$ ist, auch

$DAC + CAE < R + 0$, d. h.

$$DAC + CAE < R,$$

und also ein und derselbe rechte Winkel einer verschiedenen Größe fähig seyn müßte.

Die dritte Frage: Um wie viel, oder um was für einen Theil eines rechten Winkels ist der Winkel des Halbkreises kleiner als ein rechter Winkel? oder, denn diese Frage ist völlig dieselbe: wie viel ist der Rest des Winkels des Halbkreises, oder der vermischtlinige Winkel EAC von einem rechten Winkel? Antwort: Weniger als man angeben kann. Denn einmal ist dieser Winkel EAC, wie wir gesehen haben,

nicht

nicht = 0, und zweitens, nach dem Euclideischen Beweise kleiner als jeder geradlinige spitze Winkel.

Diese Fragen sind also so sehr schwer nicht zu beantworten, wofern man nur nicht verlangt, da zu sehen, wo man schließen muß. Wenn Ihnen dieselben mit ihren Antworten durch öfteres Ueberlesen und Ueberdenken ganz deutlich und geläufig geworden seyn werden, so lesen Sie, zur Zeit der Muße, gelegentlich auch einmal, was Sie darüber in dem Commentare des Jesuiten Clavius finden. Mehr Vergnügen werden Sie indeß, meiner Meinung nach, empfinden, wenn Sie noch vorher Herrn Kästners Geometrische Abhandlungen Sich anschaffen, und in der ersten Sammlung den vierten Absatz, mit dem Titel, Paradoxe Dreiecke, lesen.

Nun zu einer andern Betrachtung, die Sie aber überschlagen können, wenn Sie zur Absicht haben, bloß die Elementar-Mathematik zu lernen. In der Figur bei dem Satze, wovon ich jetzt rede, hat doch die gerade Linie AE mit dem Bogen AC bloß den Punkt A gemein. Denken Sie Sich also sowohl in der AE als der AC einen Punkt, welcher der nächste an A sey, und nennen Sie den in AE, M, und den in AC, m. Da AE und AC bloß den Punkt A mit einander gemein haben, so können die Punkte M und m nicht zusammen fallen, sondern es muß sich zwischen ihnen nach der ersten Euclideischen Forderung eine gerade Linie denken lassen. Wie groß ist nun diese gerade Linie Mm? Daß sie eine wirkliche Linie sey,

ist aus dem Vorhergehenden klar; aber daß wir ihre Größe auf keine Art und Weise zu bestimmen im Stande seyen, und daß daher diese Linie Mm zu denen Größen gehöre, die kleiner sind, als jede Größe, welche sich angeben läßt, werden Sie auch in der Folge (nach dem 9ten und 10ten Satze des sechsten Buchs der Euclideischen Elemente) mit vollkommner Ueberzeugung lernen. Auf diese Art giebt es also auch Größen, die kleiner sind, als jede Größe die sich angeben läßt, und wobei man sehr unrecht thun würde, wenn man dieselben, an und für sich, $= 0$ setzen wollte.

Gethan hat man es, wie Sie in der *Folge* erfahren werden, wo sich denn auch zugleich bemerken lassen wird, wie Mangel an Genauigkeit bei den Elementen einer Wissenschaft, oft freilich spät, aber endlich gewiß, in Dunkelheit und Verwirrung stürzt.

In den Schriften der neuern Mathematiker ist der Winkel eines Halbkreises, und überhaupt der Winkel eines Kreisabschnitts häufig kein vermischtliniger, sondern der geradlinige Winkel, welchen die Sehne des Abschnitts mit der durch einen ihrer Endpunkte gezogenen Tangente macht. Wenn man diesem Sprachgebrauche folgt, so kann man den zwei und dreißigsten Satz des dritten Buchs der Euclideischen Elemente, auch in folgenden verwandeln: Jeder Winkel eines Abschnitts macht, mit dem Winkel in diesem Abschnitte zusammengenommen, zwei rechte Winkel aus.

Die

Die Arithmetik fängt von den sogenannten ganzen und positiven Zahlen an, kommt aber bei der Subtraction schon auf die negativen, bei der Division auf die gebrochenen, und bei der Extraction der Wurzeln auf die irrationalen und imaginären Zahlen. In der Geometrie haben wir es im Anfange allerdings mit lauter bestimmbaren Größen zu thun; jetzt sind wir auf Linien gekommen, die kleiner sind, als jede Linie, welche sich angeben läßt, und auf Winkel von eben der Art. Was meinen Sie wohl, wenn ich Ihnen den Rath geben wollte, es mit diesen Linien und Winkeln so zu machen, wie der träge und unfähige Rechenschüler, der froh ist, wenn er die vier Species und die Regel de Tri in ganzen Zahlen gefaßt hat, und seine Zeit und sein Nachdenken besser anwenden zu können glaubt, als zur Erlernung der Lehre von den Brüchen?

Aber was sollen, was können wir mit Größen anfangen, die kleiner sind, als jede Größe, die sich angeben läßt? für uns sind sie doch wenigstens nichts als Null? Es kommt darauf an, wie wir uns dabei verhalten. Die gedachten Größen können für uns bisweilen nichts weiter als Nullen seyn, bisweilen können sie uns wichtigere Dienste leisten, als alle übrige noch so große Größen, und wenn wir sie gering achten, so werden sie wohl gar so rachsüchtig, daß sie es uns am Ende fühlen lassen, wie unentbehrlich sie sind. Doch davon künftig einmal ein Mehreres.

Zum Schlusse noch ein Paar Worte über den 35sten, 36sten und 37sten Satz. Mit den Beweisen,

die Sie im Euclides finden, treffen Sie diese Sätze meistens in den neuern Lehrbüchern der Geometrie nicht an, wohl aber mit andern, welche Sie in der Folge kennen lernen werden. Die Absicht, welche dies veranlaßt hat, ist nicht zu tadeln; man hat es den Schülern leichter machen wollen. Lassen Sie Sich indeß die Mühe nicht verdrießen, Sich auch das *bekannt* zu machen, was Vater Euclides gesagt hat; es ist immer gut, wenn man nichts von dem gering achtet, was ein Vater gesagt hat.

So viel fürs erste über das dritte Buch der Euclideischen Elemente. Da die meisten Sätze desselben Ihnen schon aus meinen Sokratischen *Gesprächen* bekannt sind, so habe ich unstreitig nichts weiter *nöthig* hinzuzufügen, um Sie zur Lesung dieses ganzen Buchs in Stand zu setzen. Mein nächster Brief wird dem gegenwärtigen nicht so schnell folgen, daß Sie nicht Zeit genug haben sollten, einen vollständigen Versuch zu machen.

Zwanzigster Brief.

Noch etwas weniges über das dritte Buch der Euclideischen Elemente, dann über einige Sätze des vierten Buchs.

Also haben Sie gefunden, daß die Sätze des dritten Buchs der Euclideischen Elemente leicht zu verstehen sind,

sind, wenn man die beiden vorhergehenden Bücher gut gefaßt hat? Ich konnte das vorher wissen, und habe eben deswegen in meinem letzten Briefe nur einige wenige Sätze ausgehoben. Allein ein Paar Anmerkungen werden Sie noch außerdem mit Nutzen lesen.

Oft muß man dasjenige, was man leicht begreift, weit öfterer wiederholen, um es sich geläufig zu machen und einzuprägen, als solches bei dem nöthig ist, was uns schwer zu lernen war. Es verhält sich hierin mit dem Auge unsers Geistes wie mit dem Auge unsers Körpers. Wie tief prägen sich nicht häufig die Eigenschaften der Naturalien, welche wir durch Mikroscope wahrnehmen, auf einmal ein? Allein wenn ich von öfterer Wiederholung rede, so verstehe ich darunter nicht jede Wiederholung, sondern verlange zugleich, daß man bei jeder seinen Gegenstand auf eine andere Art behandele. Sie haben z. B. die Sätze des dritten Buchs der Euclideischen Elemente mit ihren Beweisen gelesen und so überdacht. Nehmen Sie nun einen Satz nach dem andern, aber schreiben Sie Sich aus Ihrem Buche bloß den Satz ab, und versuchen Sie den Beweis selbst zu führen. Bei diesem Geschäfte müssen Sie es Sich zum Gesetze machen, den Euclides nie eher um Rath zu fragen, als bis Sie nach mehrern ernstlichen Versuchen ohne Rathgeber nichts finden können. Haben Sie auf diese Art alle Sätze in der Ordnung, in welcher sie im Buche stehen, durchgenommen, so wählen Sie außer der Ordnung bald diesen bald jenen zu einer

ähnlichen Behandlung. Ich müßte mich sehr trügen, wenn Sie bei Ihrem Fleiße und bei der Aufmerksamkeit, womit Sie Ihre Arbeiten zu treiben pflegen, dadurch nicht zu verschiedenen Gedanken veranlaßt werden sollten, die eben so nützlich als Ihnen selbst angenehm seyn werden. Ja auch dieses ist noch nicht genug. Euclides hat bei den Beweisen seiner Lehrsätze und den Auflösungen seiner Aufgaben eine gewisse Gleichförmigkeit beobachtet, so daß man, wenn man die von ihm dabei befolgten Regeln erst an mehrern Beispielen deutlich wahrgenommen hat, im Stande ist, allenthalben den Grund anzugeben, warum er gerade diesen Weg und keinen andern genommen? Hat man es darin nur erst zu einiger Fertigkeit gebracht, so ist das Vergnügen, welches das Studium der Mathematik gewährt, außerordentlich, und wächst mit jedem neuen Schritte, den man in dem Gebiete dieser vortreflichen Wissenschaft vorwärts thut. Ich gebe Ihnen also folgenden Rath. Wiederholen Sie das dritte Buch der Euclideischen Elemente einigemal auf die beschriebene Weise, und wenn Sie dabei, wie es nicht fehlen kann, hie und da auf andere Beweise oder andere Auflösungen fallen, als Sie in Ihrem Buche finden: so heben Sie die Sätze, wozu diese Beweise oder Auflösungen gehören, aus, und vergleichen Sie sorgfältig Ihre Beweise und Auflösungen mit den Euclideischen, und versuchen Sie, nach Gründen zu bestimmen, welche den Vorzug verdienen. Haben Sie erst mehrere selbst gefundene Beweise und Auflösungen auf diese Art behandelt, so lesen Sie, aber auch nicht eher, in Hrn.

Kästners Lehrbuche den Abschnitt vom Kreise, und vergleichen Sie wieder so genau und so sorgfältig, als es Ihnen irgend möglich ist. Die Lehre vom Kreise ist eine sehr wichtige Lehre, und verdient ganz den Fleiß, den ich Ihnen hier empfehle. Ich könnte es übernehmen, Sie zur Anwendung desselben zu leiten, allein ich lasse es jetzt bei dem Gesagten bewenden, und werde Ihnen hinterher die Gründe mittheilen, warum ich Ihnen selbst und allein, sogleich nach vorhergehenden bloßen Winken, vielleicht eine sehr schwer scheinende Arbeit auflege. Jetzt gehe ich zu einigen Anmerkungen über verschiedene Sätze des vierten Buchs fort.

Ich werde mich dabei noch kürzer fassen, als bei dem vorhergehenden Buche, denn es ist bloß der zehnte Satz, dessen Beweis ich in einer leichter zu übersehenden Form hersetzen will. Es ist nemlich

$BC \cdot BA = CAq$; also da

$BD = CA$ ist,

$BC \cdot BA = BDq$, und folglich

BD eine Tangente des Kreises $DCAE$ in D.

Dadurch wird

$$BDC = CAD$$

$$DCB = CAD + CDA = BDC + CDA$$

$$= BDA = DBC, \text{ und}$$

$$DC = DB = CA; \text{ folglich}$$

$$CAD = CDA, \text{ und}$$

$$BDA = BDC + CDA = 2CAD.$$

Nun lesen Sie das ganze vierte Buch der Euclideischen Elemente mit Aufmerksamkeit, dann wiederho-

len

len Sie es auf eben die Art, die ich Ihnen in meinem letzten Briefe für das dritte Buch empfohlen habe, und endlich verbinden Sie mit den Euclideischen Elementen Hrn. **Kästners** Anfangsgründe, und wenn Sie wollen, auch Hrn. **Karstens** Lehrbegriff der gesammten Mathematik in den Abschnitten, welche ich Ihnen in dem beifolgenden Theile bezeichnet habe. Ich überlasse auf diese Art vieles Ihrem eigenen Fleiße, aber sicher nicht um meiner Bequemlichkeit, sondern um Ihres Nutzens willen. Das nächste Mal rede ich mit Ihnen über die vier ersten Bücher der Euclideischen Elemente überhaupt, und dann werde ich unsern Briefwechsel so lange ruhen lassen, bis ich glauben kann, daß Sie zur Befolgung der in *diesem* und dem vorhergehenden Briefe Ihnen gegebenen Vorschriften Zeit genug gehabt haben.

Ein und zwanzigster Brief.

Beschluß.

Nach Ihrem letzten Briefe ändern Sie nach gerade Ihre anfängliche Meinung, als hätte ich Ihnen über das dritte und vierte Buch der Euclideischen Elemente zu wenig gesagt. Wenn Sie auf dem betretenen Wege fortgehen, so wird die gedachte Meinung bald gänzlich verschwinden, und am Ende werden Sie mir danken, daß ich Ihnen Gelegenheit zu der Erfahrung gegeben habe, daß ernstliche Anstrengung bei der Erlernung wichtiger Wissenschaften bald eine Quelle des reinsten und größten Vergnügens werde.

Woher

Woher rührt denn nun aber überhaupt das Vergnügen, welches Sie bis jetzt aus Ihren Beschäftigungen mit der Mathematik geschöpft haben? Woher kommt es, daß Sie dieses Vergnügen desto stärker und desto öfterer haben empfinden können, je weiter Sie gekommen sind? Und wie geht das zu, daß gerade die Untersuchungen, welche Ihnen anfänglich die meiste Mühe machten, hinterher Ihre liebsten Gegenstände geworden sind? Die erste Frage ist sehr leicht zu beantworten. Die Deutlichkeit und die Gewißheit, mit welcher Sie alles bisher Erlernte haben fassen können, ist die Hauptursache des gedachten Vergnügens. Ist dieses wahr, so haben auch die übrigen keine Schwierigkeit. Je weiter Sie fortgiengen, desto leichter ward es Ihnen; und da die erwähnte Deutlichkeit und Gewißheit nicht ab, sondern eher zunahmen, so eröfnete sich Ihnen statt einer eine zwiefache Quelle. Wenn Ihnen bisweilen dieser oder jene Gegenstand anfänglich mit Schwierigkeiten verknüpft schien, so zweifelten Sie an einem glücklichen Erfolge Ihrer Bemühungen; und da Sie Sich durch diese Schwierigkeiten nicht abschrecken ließen, so erfuhren Sie am Ende eine angenehme Täuschung Ihrer Erwartungen, und hatten Gelegenheit, wenigstens im Kleinen, zu erfahren, daß Schwierigkeiten, standhaft überwunden, zu der Würze der menschlichen Vergnügungen gehören. So viel von dem, was Sie bisher bemerkt haben, in Ansehung des Zukünftigen setze ich bloß dieses her: Das Vergnügen, welches das Studium der Mathematik gewährt, der Werth, in welchem sich diese Wissenschaft uns zeigt,

die

die Brauchbarkeit und der Nutzen, welchen sie für uns haben kann, halten mit den Fortschritten, welche wir darin machen, gleichen Tritt. Ueberzeugen Sie Sich davon aus Ihren bisherigen Erfahrungen, so weit dieselben dazu hinreichen, denn hier muß man den Anfang von selbst gehabten Erfahrungen machen; und wenn Sie dann können, so entsagen Sie dem bisher bewiesenen Fleiße.

Jetzt nehmen Sie von den Ihnen übersandten Briefen den zweiten und dritten zur Hand. Sie finden darin (S. 10 und 17) die Behauptung: „Der Gegenstand der Geometrie sey unabhängig von aller Erfahrung." Das wissen Sie, daß wir keinen von den bisher betrachteten Begriffen auf dem Wege derjenigen Abstraction gefunden haben, durch welche wir uns von wirklichen Dingen, wenn wir davon ausgehen, allgemeine Begriffe verschaffen können; und eben so, daß wir uns bei unsern Beweisen nie auf Erfahrungen berufen haben. Ob wir aber in der Mathematik der Erfahrung nicht wenigstens eben so viel verdanken, als diejenigen ihren Eltern schuldig sind, welche zwar von denselben ihre ganze Erziehung genossen, aber bei ihrem Eintritte in die Welt der Unterstützung derselben nicht weiter sich erfreuen konnten? ist eine Frage, die nicht unausgemacht zu bleiben braucht, indeß jetzt noch nicht ganz für Sie gehört. Das bin ich versichert, daß Sie Sich, wenn der Tod in diesem Augenblicke Sie Vater- und Mutterlos machte, doch stets mit einem dankbaren Herzen Ihrer Eltern erinnern, und zu dem Glücke, welches Sie Sich künftig erwerben könnten, auf keinem an-

dern

dern Wege als durch die Befolgung der Ihnen von denselben ertheilten heilsamen Lehren gelangen würden.

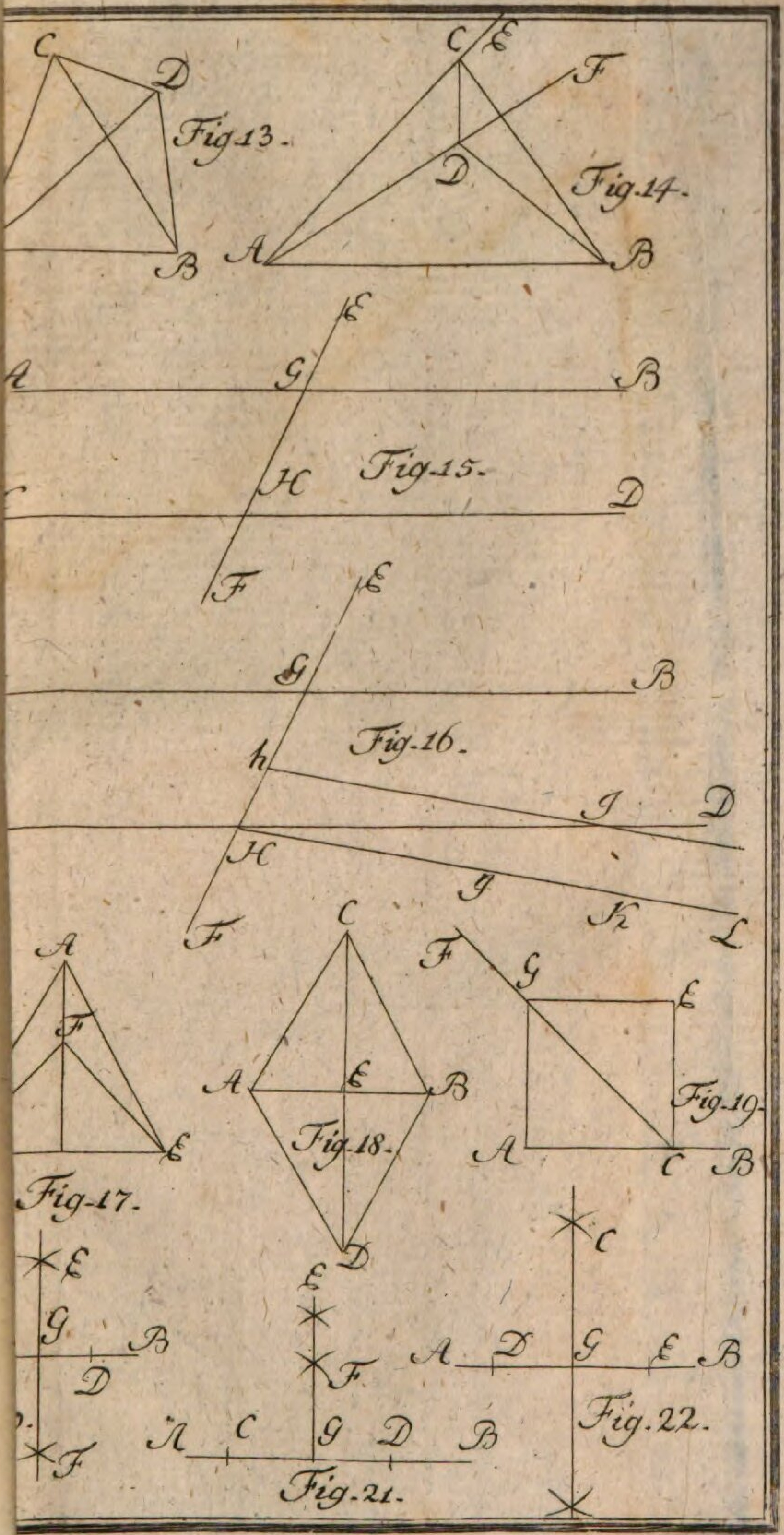
Und nun noch eine Aussicht zum Sporn Ihrer Lernbegierde. Die Deutlichkeit und die Gewißheit, wodurch Sich Ihnen die Mathematik bisher von einer so reizenden Seite gezeigt hat, ist kein Blendwerk, sondern so wahr, daß alle deswegen der Mathematik allgemein ertheilte Lobsprüche ihr nie werden entzogen werden. Aber ich hoffe Ihnen in der Folge zu beweisen, daß alle Deutlichkeit und Gewißheit der Elementar-Mathematik, und insbesondere die der Elementar-Geometrie, nur die unterste Stufe der uns erreichbaren Deutlichkeit und Gewißheit sey. Es ist das keine neue Behauptung, wenigstens werde ich Ihnen künftig in den Schriften der Bewährtesten unter den Mathematikern, Stellen nachweisen, welche dazu hinleiten können. Aber verkannt kann diese Wahrheit seyn, ja ich glaube den Fehltritt zu kennen, durch welchen sich ein großer Theil, insbesondere der neuern Mathematiker und Philosophen, den Zugang dazu unerreichbar gemacht hat. Doch sie darf nicht verkannt bleiben, sonst bliebe auch noch länger der Vorwurf unwiderlegbar: Gott habe es uns nicht möglich gelassen, bei den wichtigsten Gegenständen der menschlichen Erkenntniß, d. h. in Ansehung seines Daseins und seiner über alles waltenden Vorsehung, ferner in Ansehung des Wesens unserer Seele, ihrer Bestimmung und der Art, wie dieselbe erfüllt werden kann, einen eben so hohen Grad der Deutlichkeit und Gewißheit zu erreichen, als uns in einer Wis-

sens

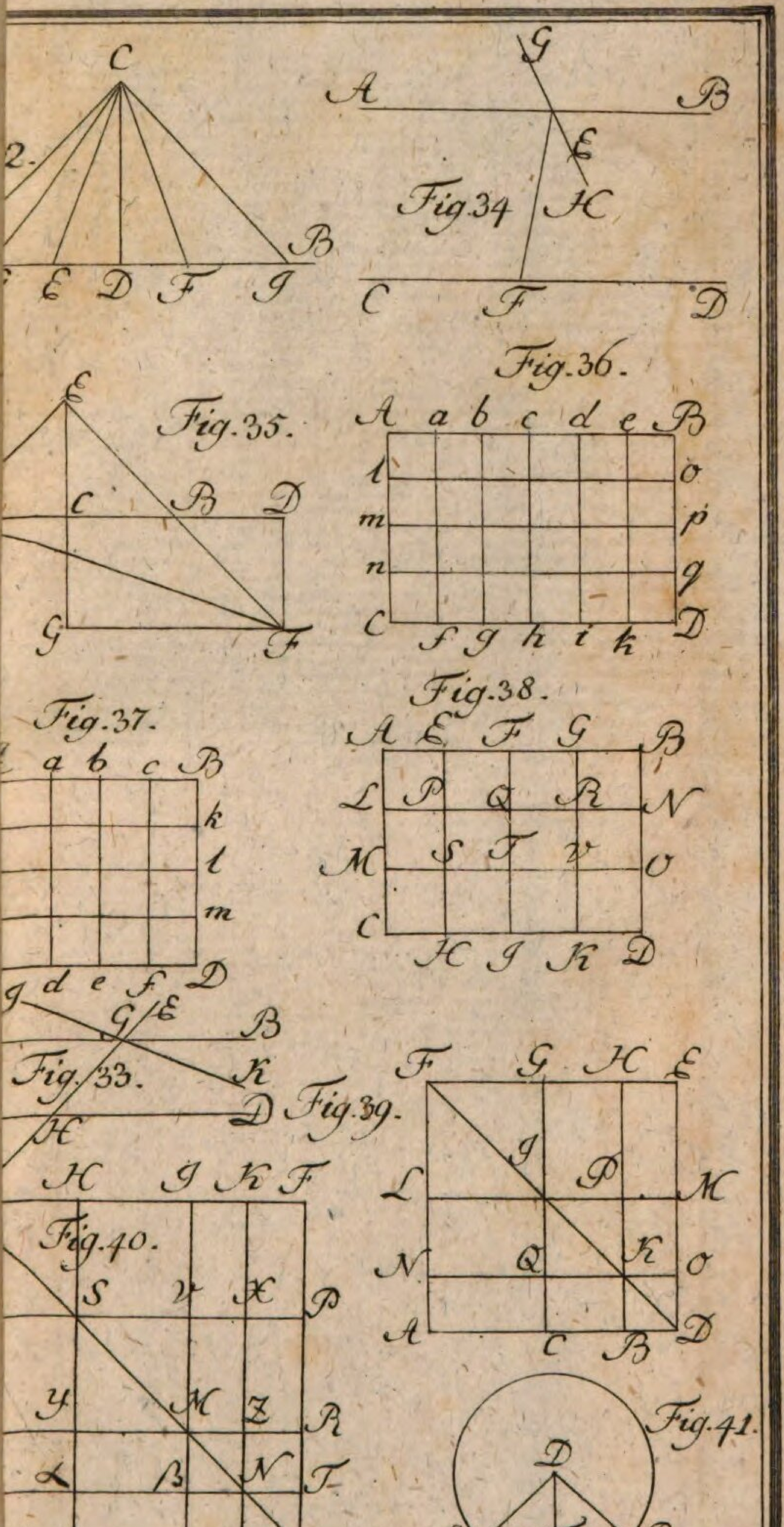
senschaft, so gar, leicht ist, die der größte Theil der Menschen kaum den Namen nach kennt, und ein großer Theil auch nicht einmal zu kennen braucht. Das werden Sie von mir zum voraus versichert seyn, daß ich, wenn ich bei verschiedenen Dingen, von einem gleich hohen Grade der Deutlichkeit und Gewißheit rede, deswegen nicht behaupte, es gebe auch nur eine Leiter, auf welcher man diese höchste Stufe hinanklimmen müsse. Jetzt ist es bloß meine Absicht, Ihnen eine reizende Aussicht in der Ferne zu zeigen. Was für Wege dazu führen? was für Gegenstände Sie da erblicken werden? wo das gezeigte Ziel sich befinde? sollen Sie künftig sehen. Also ohne jetzt durch unnützes Grübeln die Zeit zu verderben, und ohne mir beizuiegen, weil ich Ihnen hier bloß einen Wink gegeben habe, der Sie, wenn Sie ohne weitere Belehrung ihn mißbrauchen wollten, irre führen könnte, daß ich mich durch eine Einbildung täuschen lasse: überlegen Sie bisweilen folgende Stelle aus einer Ihnen bekannten Fabel.

Vielleicht daß mancher eh die Wahrheit finden sollte,
Wenn er mit mindrer Müh' die Wahrheit suchen wollte.
Und mancher hätte sie wohl zeitiger entdeckt,
Wofern er nicht geglaubt, sie wäre tief versteckt.
Verborgen ist sie wohl; allein nicht so verborgen,
Daß du der finstern Schriften Wust,
Um sie zu sehn, mit tausend Sorgen,
Bis auf den Grund durchwühlen mußt.
Verlaß dich nicht auf fremde Müh',
Such selbst, such aufmerksam, such oft; du findest sie.
Die Wahrheit, lieber Freund, die alle nöthig haben,
Die uns als Menschen glücklich macht,
Ward von der weisen Hand, die sie uns zugedacht,
Nur leicht verdeckt, nicht tief vergraben.

Tab. II.


C D B
Fig. 13.
C E F D A B
Fig. 14.
E A G B H C D F
Fig. 15.
E G B h I D H g K L F
Fig. 16.
A F E
Fig. 17.
C A E B D
Fig. 18.
F G E A C B
Fig. 19.
E G B D F
E F A C G D B
Fig. 21.
C A D G E B
Fig. 22.

Tab. IV.



2. T. d. Kupf.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Michelsen, Johann A.

Anleitung zur Selbsterlernung der Geometrie

Berlin 1790

Math.p. 354
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082417-2
VD18 11579315-002